

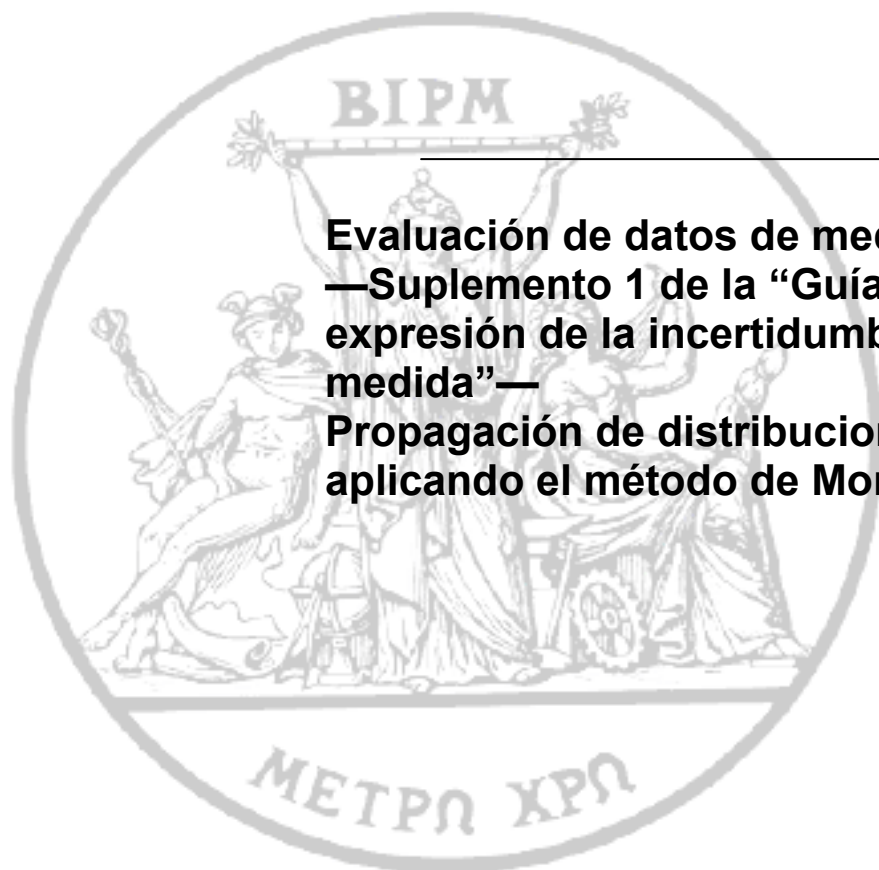
Evaluación de Datos de Medición

– Suplemento 1 de la “Guía para la Expresión de la Incertidumbre de Medida” –

Propagación de incertidumbres aplicando el método de Monte Carlo

$$k\sqrt{A^2 + B^2}$$

JCGM 101:2008



**Evaluación de datos de medición
—Suplemento 1 de la “Guía para la
expresión de la incertidumbre de
medida”—
Propagación de distribuciones
aplicando el método de Monte Carlo**

Primera edición, 2008
Primera edición de la traducción al español, 2010
Centro Español de Metrología

© JCGM 2008

© JCGM 2008

Los derechos de autor de esta guía del JCGM son propiedad conjunta de las organizaciones miembros del JCGM (BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP y OIML).

Derechos de autor

Aun cuando la versión electrónica puede descargarse de forma gratuita de las páginas web de alguna o varias de las organizaciones miembros del JCGM, los derechos económicos y éticos de autor relativos a todas las publicaciones del JCGM están protegidos internacionalmente. El JCGM no permite, sin autorización expresa por escrito, que terceras partes reescriban o modifiquen, editen o vendan, distribuyan o pongan en la red, esta publicación. De la misma forma, el JCGM no permite alteraciones, incorporaciones u omisiones en sus publicaciones, incluidos sus títulos, lemas y logotipos, ni en aquellas de sus organizaciones miembros.

Versiones oficiales y traducciones

Las únicas versiones oficiales de los documentos son las publicadas por el JCGM en sus idiomas originales.

Las publicaciones del JCGM pueden traducirse a idiomas distintos de aquellos en los que los documentos fueron publicados por el JCGM. Antes de hacer una traducción debe obtenerse la autorización del JCGM. Todas las traducciones deben respetar el original y el formato oficial de las fórmulas y unidades (sin ningún tipo de conversión a otras fórmulas o unidades), asimismo deben contener la siguiente declaración:

Todos los productos de JCGM están protegidos internacionalmente por derechos de autor. La presente traducción del documento original del JCGM ha sido elaborada bajo autorización del JCGM, el cual conserva plenamente los derechos de autor internacionalmente protegidos sobre el diseño y el contenido de este documento y sobre los títulos, logotipos y lemas del JCGM. Las organizaciones miembros del JCGM también conservan plenamente sus derechos protegidos internacionalmente sobre sus títulos, lemas y logotipos incluidos en las publicaciones del JCGM. La única versión oficial es el documento publicado por el JCGM en los idiomas originales.

El JCGM no acepta ninguna responsabilidad derivada de la idoneidad, exactitud, integridad o calidad de la información y de los materiales ofrecidos en cualquier traducción. Se suministrará al JCGM una copia de la traducción en el momento de la publicación.

El Centro Español de Metrología publica la traducción al español de la presente edición del Suplemento 1 de la GUM, tanto en papel como en formato electrónico en www.cem.es, con autorización expresa del JCGM.

Reproducción

Este documento se reproduce con permiso del JCGM, el cual conserva plenamente los derechos de autor protegidos internacionalmente sobre el diseño y el contenido de este documento y sobre los títulos, lemas y logotipos del JCGM. Las organizaciones miembros del JCGM también conservan plenamente sus derechos protegidos internacionalmente sobre sus títulos, lemas y logotipos incluidos en las publicaciones del JCGM. Las únicas versiones oficiales son las versiones originales de los documentos publicados por el JCGM.

Exención de responsabilidad

El JCGM y sus organizaciones miembros han publicado este documento para mejorar el acceso a la información sobre metrología. Se esforzarán por actualizarlo de manera periódica, pero no pueden garantizar la exactitud en todo momento y no serán responsables de los daños directos o indirectos que puedan derivarse de su uso. Las referencias a productos comerciales de cualquier tipo (incluyendo *software*, datos o *hardware*, pero sin limitarse a ellos) o los enlaces a páginas web sobre los que el JCGM y sus organizaciones miembros no tengan control y sobre los que no asuman ninguna responsabilidad, no implican aprobación, adopción o recomendación del JCGM ni de sus organizaciones miembros.

Contenido

Prólogo	v
Introducción	vi
1 Alcance	1
2 Referencias normativas	2
3 Términos y definiciones	3
4 Convenciones y notación	7
5 Principios básicos	10
5.1 Fases principales de la evaluación de la incertidumbre	10
5.2 Propagación de distribuciones	11
5.3 Resumen de la obtención de información	11
5.4 Realización de la propagación de distribuciones	12
5.5 Informe de resultados	14
5.6 Enfoque GUM	15
5.7 Condiciones para la aplicación válida del enfoque GUM en modelos lineales	16
5.8 Condiciones para la aplicación válida del enfoque GUM en modelos no lineales	17
5.9 La aproximación Monte Carlo a las fases de propagación y resumen	18
5.10 Condiciones para la aplicación válida del método de Monte Carlo descrito	19
5.11 Comparación entre el enfoque GUM y el método de Monte Carlo descrito	21
6 Funciones de densidad de probabilidad para las magnitudes de entrada	23
6.1 Generalidades	23
6.2 Teorema de Bayes	23
6.3 El principio de máxima entropía	24
6.4 Asignación de la función de densidad de probabilidad en algunas circunstancias habituales	24
6.4.1 Generalidades	24
6.4.2 La distribución rectangular	25
6.4.3 La distribución rectangular con límites inexactos	25
6.4.4 La distribución trapezoidal	27
6.4.5 La distribución triangular	29
6.4.6 La distribución arco seno (en forma de U)	29
6.4.7 La distribución gaussiana	30
6.4.8 La distribución gaussiana multivariante	30
6.4.9 La distribución t	32
6.4.10 La distribución exponencial	33
6.4.11 La distribución Gamma	34
6.5 Distribuciones de probabilidad a partir de estimaciones previas de incertidumbre	35
7 Aplicación del método de Monte Carlo	35
7.1 Generalidades	35
7.2 Número de reiteraciones en el método de Monte Carlo	35
7.3 Muestreo a partir de distribuciones de probabilidad	36
7.4 Evaluación del modelo	36
7.5 Representación discreta de la función de distribución para la magnitud de salida	37
7.6 Estimación de la magnitud de salida y de su incertidumbre típica asociada	37
7.7 Intervalo de cobertura para una magnitud de salida	38
7.8 Tiempo de procesamiento	39
7.9 Procedimiento de Monte Carlo adaptable	39
7.9.1 Generalidades	39
7.9.2 Tolerancia numérica asociada a un valor numérico	39
7.9.3 Objetivo de un procedimiento adaptable	40
7.9.4 Procedimiento adaptable	40

Suplemento 1 de la GUM, traducción al español 2010

8 Validación de los resultados	42
8.1 Validación del enfoque GUM mediante el método de Monte Carlo	42
8.2 Obtención de resultados a partir del método de Monte Carlo, a efectos de validación	43
9 Ejemplos	43
9.1 Ilustraciones de aspectos de este Suplemento	43
9.2 Modelo aditivo	44
9.2.1 Formulación	44
9.2.2 Magnitudes de entrada distribuidas normalmente (gaussianas)	45
9.2.3 Magnitudes de entrada distribuidas rectangularmente con la misma amplitud	47
9.2.4 Magnitudes de entrada distribuidas rectangularmente, con diferentes amplitudes	48
9.3 Calibración de masa	49
9.3.1 Formulación	49
9.3.2 Propagación y conclusiones	51
9.4 Pérdida por comparación en la calibración de un medidor de potencia de microondas	53
9.4.1 Formulación	53
9.4.2 Propagación y resumen: covarianza nula	54
9.4.3 Propagación y resumen: covarianza distinta de cero	60
9.5 Calibración de bloque patrón	62
9.5.1 Formulación: modelo	62
9.5.2 Formulación: asignación de FDP	63
9.5.3 Propagación y resumen	67
9.5.4 Resultados	67
Anexos	69
Anexo A_Perspectiva histórica	69
Anexo B_Coeficientes de sensibilidad y balance de incertidumbres	70
Anexo C Muestreo a partir de distribuciones de probabilidad	71
C.1 Generalidades	71
C.2 Distribuciones generales	71
C.3 Distribución rectangular	72
C.3.1 Generalidades	72
C.3.2 Test de aleatoriedad	73
C.3.3 Procedimiento para generar números pseudoaleatorios a partir de una distribución rectangular	73
C.4 Distribución gaussiana	74
C.5 Distribución gaussiana multivariante	75
C.6 Distribución t	76
Anexo D Aproximación continua a la función de distribución para la magnitud de salida	77
Anexo E Intervalo de confianza para la convolución de cuarto orden de una distribución rectangular	80
Anexo F_El problema de la pérdida por comparación	82
F.1 Obtención analítica de la esperanza matemática y de la desviación típica	82
F.2 Solución analítica para una estimación igual a cero del coeficiente de reflexión de tensión con una covarianza asociada cero	83
F.3 Enfoque GUM aplicado al problema de la pérdida por comparación	84
F.3.1 Magnitudes de entrada no correlacionadas	84
F.3.2 Magnitudes de entrada correlacionadas	85
Anexo G_Glosario de los símbolos principales	86
Bibliografía	91
Índice alfabético	94

Prólogo

En el año 1997 se creó un Comité Mixto de Guías de Metrología (JCGM), presidido por el Director de la Oficina Internacional de Pesas y Medidas (BIPM) e integrado por las siete organizaciones internacionales que elaboraron, en 1993, la “Guía para la expresión de la incertidumbre de medida” (GUM) y el “Vocabulario Internacional de términos fundamentales y generales de metrología” (VIM). El JCGM asumió la responsabilidad del Grupo Asesor Técnico 4 de ISO (TAG4) en estos dos documentos.

El Comité Mixto está formado por el BIPM junto con la Comisión Electrotécnica Internacional (IEC), la Federación Internacional de Química Clínica y Medicina de Laboratorio (IFCC), la Cooperación Internacional de Acreditación de Laboratorios (ILAC), la Organización Internacional de Normalización (ISO), La Unión Internacional de Química Pura y Aplicada (IUPAC), la Unión Internacional de Física Pura y Aplicada (IUPAP) y la Organización Internacional de Metrología Legal (OIML).

El JCGM tiene dos grupos de trabajo: el Grupo de Trabajo 1, “Expresión de la incertidumbre de medida”, cuya tarea es promover el uso de la GUM y elaborar Suplementos así como otros documentos para su amplia utilización, y el Grupo de Trabajo 2, “Grupo de Trabajo sobre el vocabulario internacional de términos fundamentales y generales de metrología (VIM)”, cuya tarea consiste en revisar el VIM y promover su uso.

Suplementos como el presente están destinados a dar un valor añadido a la GUM proporcionando una guía sobre aspectos de la evaluación de incertidumbre que en la GUM no se tratan explícitamente. La guía es, sin embargo, lo más coherente posible con el fundamento general sobre probabilidades de la GUM.

El presente Suplemento 1 de la GUM ha sido elaborado por el Grupo de Trabajo 1 del JCGM y se ha visto favorecido por las revisiones detalladas de las organizaciones miembros del JCGM y los Institutos Nacionales de Metrología.

Introducción

Este Suplemento de la “Guía para la expresión de la incertidumbre de medida” (GUM) aborda la propagación de las distribuciones de probabilidad a partir de un modelo matemático de medición [GUM: 1995, 3.1.6], como base para la evaluación de la incertidumbre de medida mediante el método de Monte Carlo. El tratamiento es aplicable a un modelo con cualquier número de magnitudes de entrada y una sola magnitud de salida.

El mencionado método de Monte Carlo es una alternativa práctica al enfoque GUM sobre la incertidumbre [GUM: 1995, 3.4.8]. Es de aplicación cuando:

- a) la linealización del modelo proporciona una representación inadecuada, o bien cuando
- b) la función de densidad de probabilidad (FDP) para la magnitud de salida se aparta apreciablemente de una distribución normal o de una distribución t^{NT1} , por ejemplo, debido a una marcada asimetría.

En el caso a), la estimación de la magnitud de salida y la correspondiente incertidumbre típica proporcionada por el enfoque GUM sobre la incertidumbre podría ser poco fiable. En el caso b), podrían resultar unos intervalos de cobertura poco realistas (una generalización de la “incertidumbre expandida” en el enfoque GUM sobre la incertidumbre).

La GUM [GUM: 1995, 3.4.8] “... proporciona un marco para la evaluación de la incertidumbre...”, basado en la ley de propagación de la incertidumbre [GUM: 1995, 5] y la caracterización de la magnitud de salida mediante una distribución normal o una distribución t [GUM: 1995, G.6.2, G.6.4]. En este marco, la ley de propagación de la incertidumbre proporciona un medio para la propagación de las incertidumbres a través del modelo. En concreto, evalúa la incertidumbre típica asociada a una estimación de la magnitud de salida, en función de:

- 1º las mejores estimaciones de las magnitudes de entrada,
- 2º las incertidumbres típicas asociadas a estas estimaciones y, en su caso,
- 3º los grados de libertad asociados a estas incertidumbres típicas, así como
- 4º cualquier covarianza no nula asociada a parejas de estas estimaciones.

Asimismo, en este marco, la FDP elegida para caracterizar la magnitud de salida se utiliza con la finalidad de proporcionar un intervalo de cobertura, para una probabilidad de cobertura estipulada, para esa magnitud.

Las mejores estimaciones, las incertidumbres típicas, las covarianzas y los grados de libertad resumen la información disponible relativa a las magnitudes de entrada. Con el planteamiento aquí considerado, la información disponible se representa en términos de FDP de las magnitudes de entrada. El enfoque trabaja con estas FDP a fin de determinar la FDP de la magnitud de salida.

Mientras existen algunas limitaciones al enfoque GUM sobre la incertidumbre, la propagación de distribuciones siempre proporciona una FDP para la magnitud de salida coherente con el modelo de medición y las FDP de las magnitudes de entrada. La FDP para la magnitud de salida muestra el grado de conocimiento sobre dicha magnitud, basado en el conocimiento de las magnitudes de entrada, tal como lo describen las FDP que se les asignan. Una vez que la FDP de la magnitud de salida está disponible, dicha magnitud puede representarse por su esperanza matemática, tomada como una estimación de la magnitud, y por su desviación típica, tomada como la incertidumbre

^{NT1} En el original en inglés de este documento aparece la expresión “scaled and shifted t -distribution”. En esta versión en español se ha traducido simplemente como “distribución t ”.

Suplemento 1 de la GUM, traducción al español 2010

típica asociada a la estimación. Además, la FDP puede utilizarse para obtener un intervalo de cobertura correspondiente a una probabilidad de cobertura estipulada para la magnitud de salida.

Por lo general, el uso de una FDP, tal como se describe en este Suplemento, es coherente con los conceptos fundamentales de la GUM. La FDP para una magnitud expresa el estado de conocimiento acerca de la magnitud; es decir, cuantifica el grado de certidumbre sobre los valores que pueden asignarse a la magnitud, sobre la base de la información disponible. La información por lo general consta de datos estadísticos sin procesar, resultados de medida u otros informes científicos relevantes, así como criterios profesionales.

Con el fin de asignar una FDP a una magnitud, sobre la base de una serie de indicaciones, puede aplicarse el teorema de Bayes [27, 33]. Cuando se dispone de información adecuada en relación con los efectos sistemáticos, puede utilizarse el principio de máxima entropía para asignar una FDP adecuada [51, 56].

La propagación de distribuciones tiene una aplicación más amplia que el enfoque GUM sobre la incertidumbre. Se trabaja con información más completa que la proporcionada por las mejores estimaciones y sus incertidumbres típicas asociadas (así como los grados de libertad y covarianzas, cuando proceda).

El anexo A incluye una perspectiva histórica sobre esta cuestión.

NOTA 1 Las citas expresadas en la forma [GUM: 1995, 3.1.6] se refieren a apartados de la GUM.

NOTA 2 La GUM presenta un planteamiento para el caso en que la linealización sea inadecuada [GUM: 1995, 5.1.2 nota]. Su enfoque tiene limitaciones ya que sólo se utilizan los términos principales no lineales del desarrollo en serie de Taylor del modelo, y las FDP para las magnitudes de entrada se consideran normales.

NOTA 3 En sentido estricto, la GUM caracteriza la variable $(Y - y) / u(y)$ mediante una distribución t de Student, donde Y es la magnitud de salida, y una estimación de Y , y $u(y)$ la incertidumbre típica asociada a y [GUM: 1995, G.3.1]. Esta caracterización también se utiliza en este Suplemento. (De hecho la GUM se refiere a la variable $(y - Y) / u(y)$.)

NOTA 4 Una FDP para una magnitud no debe entenderse como una densidad de frecuencia.

NOTA 5 "La evaluación de la incertidumbre no es ni una tarea rutinaria ni una tarea puramente matemática, sino que depende del conocimiento detallado de la naturaleza del mensurando y del método y procedimiento de medición utilizados. Por tanto, la calidad y utilidad de la incertidumbre asociada al resultado de medida dependen, en última instancia, de la comprensión, el análisis crítico y la integridad de las personas que contribuyen al establecimiento de dicho valor." [17]

Evaluación de datos de medición —Suplemento 1 de la “Guía para la expresión de la incertidumbre de medida”— Propagación de distribuciones aplicando el método de Monte Carlo

1 Alcance

Este Suplemento presenta un enfoque numérico general, en consonancia con los principios de la GUM [GUM: 1995 G.1.5], para llevar a cabo los cálculos requeridos como parte de una evaluación de la incertidumbre de medida. El enfoque se aplica a modelos arbitrarios con una única magnitud de salida, donde las magnitudes de entrada vienen caracterizadas por cualquier tipo de FDP especificada [GUM: 1995, G.1.4, G.5.3].

Al igual que la GUM, este Suplemento aborda principalmente la expresión de la incertidumbre de medida de una magnitud física bien definida –el mensurando– que puede ser caracterizada por un valor esencialmente único [GUM: 1995, 1.2].

Este Suplemento también es orientativo en situaciones en que las condiciones para el enfoque GUM sobre la incertidumbre [GUM: 1995, G.6.6] no se cumplan o su cumplimiento sea poco evidente. También puede utilizarse cuando sea difícil aplicar el enfoque GUM sobre la incertidumbre, por ejemplo, debido a la complejidad del modelo. Las directrices se presentan de forma adecuada para aplicaciones informáticas.

Este Suplemento se puede utilizar para obtener (una representación de) la FDP de la magnitud de salida, de la que pueden obtenerse:

- a) una estimación de la magnitud de salida,
- b) la incertidumbre típica asociada a esta estimación,
- c) un intervalo de cobertura para dicha magnitud correspondiente a una probabilidad de cobertura determinada.

Dado (i) el modelo que relaciona las magnitudes de entrada y la magnitud de salida y (ii) las FDP que caracterizan a las magnitudes de entrada, existe una única FDP para la magnitud de salida. En general, esta última FDP no se puede determinar analíticamente. Por lo tanto, el objetivo del enfoque descrito aquí es determinar los anteriores apartados a), b) y c) con una tolerancia numérica preestablecida, evitando las aproximaciones no cuantificadas.

Este Suplemento puede utilizarse para obtener, para una probabilidad de cobertura preestablecida, cualquier intervalo de cobertura requerido, incluyendo tanto el intervalo con probabilidad simétrica como el intervalo de cobertura más pequeño.

Este Suplemento se aplica tanto a magnitudes de entrada independientes, a cada una de las cuales se le asigna una FDP adecuada, como a las no independientes; es decir, cuando a alguna o a todas estas magnitudes se les asigna una FDP conjunta.

Suplemento 1 de la GUM, traducción al español 2010

Los problemas típicos en la evaluación de la incertidumbre, a los que puede aplicarse este Suplemento, son aquellos en los que:

- las contribuciones a la incertidumbre no son del mismo orden de magnitud [GUM: 1995, G.2.2],
- es difícil, o no conveniente, proporcionar las derivadas parciales del modelo, tal como requiere la ley de propagación de la incertidumbre [GUM: 1995, 5],
- la FDP de la magnitud de salida no es una distribución normal o una distribución t [GUM: 1995, G.6.5],
- la estimación de la magnitud de salida y su correspondiente incertidumbre típica asociada son, aproximadamente, de la misma magnitud [GUM: 1995, G.2.1],
- los modelos son arbitrariamente complicados [GUM: 1995, G.1.5],
- las FDP de las magnitudes de entrada son asimétricas [GUM: 1995, G.5.3].

Para comprobar que puede aplicarse el enfoque GUM sobre la incertidumbre, se proporciona un procedimiento de validación. El enfoque GUM sobre la incertidumbre sigue siendo la principal opción para evaluar la incertidumbre en circunstancias en que pueda demostrarse su aplicabilidad.

Por lo general es suficiente expresar la incertidumbre de medida con una o dos cifras decimales significativas. Para tener una seguridad razonable de que, a partir de la información proporcionada, las cifras decimales comunicadas son correctas, se incluye una orientación sobre la realización de los cálculos.

Lo anterior se ilustra mediante ejemplos detallados.

Este documento es un Suplemento de la GUM y se utiliza conjuntamente con ella. Otros enfoques, por lo general en consonancia con la GUM, pueden utilizarse alternativamente. Este Suplemento va dirigido a los mismos destinatarios que la GUM.

NOTA 1 Este Suplemento no tiene en cuenta los modelos que no definen la magnitud de salida de forma única (por ejemplo, los que requieren la solución de una ecuación cuadrática sin especificar qué raíz debe tomarse).

NOTA 2 Este Suplemento no considera la situación en la que previamente se dispone de una FDP de la magnitud de salida, aunque el tratamiento dado aquí pueda adaptarse a dicho caso.[16]

2 Referencias normativas

Los siguientes documentos normativos son indispensables para la aplicación de este documento:

JCGM 100 (GUM: 1995). *Guide to the expression of uncertainty in measurement* (GUM), 1995.¹

JCGM 200 (VIM: 2008). *International Vocabulary of Metrology—Basic and General Concepts and Associated Terms, VIM*, 3rd Edition, 2008.²

¹ Guía para la expresión de la incertidumbre de medida. 2ª edición en español, 2000. Centro Español de Metrología.

² Vocabulario Internacional de Metrología. Conceptos fundamentales y generales, y términos asociados. 3ª edición en español, 2008. Centro Español de Metrología.

3 Términos y definiciones

A efectos del presente documento, se aplican los términos y definiciones de la GUM y del "Vocabulario Internacional de términos fundamentales y generales de Metrología" (VIM), a menos que se indique de otro modo. A continuación se presentan algunas de las definiciones más relevantes de estos documentos (véase el apartado 4.2), adaptadas cuando ha sido necesario. También se dan otras definiciones importantes para este Suplemento, incluyendo aquellas extraídas o adaptadas de otras fuentes.

En el anexo G se incluye un glosario de los símbolos principales.

3.1

distribución de probabilidad

función (variable aleatoria) que proporciona la probabilidad de que una variable aleatoria tome cualquier valor dado o pertenezca a un determinado conjunto de valores.

NOTA 1 La probabilidad sobre el conjunto total de valores de la variable aleatoria es igual a 1.

[Adaptada de la Norma ISO 3534-1:1993 1.3; GUM: 1995, C.2.3]

NOTA 2 La distribución de probabilidad se denomina monovariante o univariante cuando se refiere a una única variable aleatoria (escalar), y multivariante si se refiere a un vector de variables aleatorias. Una distribución de probabilidad multivariante también se denomina distribución conjunta.

NOTA 3 La distribución de probabilidad puede tomar la forma de una función de distribución o de una función de densidad de probabilidad.

3.2

función de distribución

función que, para cada valor de ξ , da la probabilidad de que la variable aleatoria X sea menor o igual que ξ :

$$G_x(\xi) = \Pr(X \leq \xi)$$

[Adaptada de la Norma ISO 3534-1:1993 1.4; GUM: 1995 C.2.4]

3.3

función de densidad de probabilidad

derivada (cuando existe) de la función de distribución:

$$g_x(\xi) = dG_x(\xi)/d\xi$$

NOTA Al producto $g_x(\xi)d\xi$ se le denomina "elemento de probabilidad":

$$g_x(\xi)d\xi = \Pr(\xi < X < \xi + d\xi)$$

[Adaptada de la Norma ISO 3534-1:1993 1.5; GUM: 1995, C.2.5]

3.4

distribución normal

distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua X , cuya función de densidad de probabilidad es:

$$g_X(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi - \mu}{\sigma}\right)^2\right],$$

para $-\infty < \xi < +\infty$

NOTA 1 La esperanza matemática y la desviación típica de X son respectivamente μ y σ .

[Adaptada de la Norma ISO 3534-1:1993, 1.37; GUM: 1995, C.2.14]

NOTA 2 La distribución normal también se conoce como distribución gaussiana.

3.5

distribución t

distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua X , cuya función de densidad de probabilidad es:

$$g_X(\xi) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{\xi^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}$$

para $-\infty < \xi < +\infty$, siendo el parámetro ν (número entero positivo) el número de grados de libertad de la distribución, donde:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z > 0$$

es la función gamma.

3.6

esperanza matemática

propiedad de una variable aleatoria que, para una variable aleatoria continua X caracterizada por una FDP $g_X(\xi)$, viene dada por:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi g_X(\xi) d\xi$$

NOTA 1 No todas las variables aleatorias tienen esperanza matemática.

NOTA 2 La esperanza matemática de la variable aleatoria $Z = F(X)$, para una función $F(X)$ dada, es:

$$E(Z) = E(F(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) g_X(\xi) d\xi$$

3.7

varianza

propiedad de una variable aleatoria que, para una variable aleatoria continua X caracterizada por una FDP $g_x(\xi)$, viene dada por:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [\xi - E(X)]^2 g_x(\xi) d\xi$$

NOTA No todas las variables aleatorias tienen varianza.

3.8

desviación típica

raíz cuadrada positiva $[V(X)]^{1/2}$ de la varianza.

3.9

momento de orden r

esperanza matemática de la r -ésima potencia de la variable aleatoria, expresada por:

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^r g_x(\xi) d\xi$$

NOTA 1 El momento central de orden r es la esperanza matemática de la variable aleatoria $Z = [X - E(X)]^r$.

NOTA 2 La esperanza matemática $E(X)$ es el momento de primer orden. La varianza $V(X)$ es el momento central de orden 2.

3.10

covarianza

propiedad de una pareja de variables aleatorias que, para dos variables aleatorias continuas X_1 y X_2 caracterizadas por una FDP conjunta (multivariante) $g_x(\xi)$, donde $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ y $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$, viene dada por:

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\xi_1 - E(X_1)][\xi_2 - E(X_2)] g_x(\xi) d\xi_1 d\xi_2$$

NOTA No todas las parejas de variables aleatorias tienen covarianza.

3.11

matriz de incertidumbre

matriz de dimensión $N \times N$ que contiene en su diagonal los cuadrados de las incertidumbres típicas asociadas a las estimaciones de las componentes de una magnitud vectorial N -dimensional y en las posiciones restantes fuera de la diagonal, las covarianzas asociadas a las parejas de estimaciones.

NOTA 1 Una matriz de incertidumbre \mathbf{U}_x de dimensión $N \times N$ asociada al vector estimación \mathbf{x} de una magnitud vectorial \mathbf{X} se representa por:

$$\mathbf{U}_x = \begin{bmatrix} u(x_1, x_1) & \cdot & \cdot & \cdot & u(x_1, x_N) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u(x_N, x_1) & \cdot & \cdot & \cdot & u(x_N, x_N) \end{bmatrix}$$

donde $u(x_i, x_i) = u^2(x_i)$ es la varianza (cuadrado de la incertidumbre típica) asociada a x_i y $u(x_i, x_j)$ es la covarianza asociada a x_i y x_j . Si los elementos X_i y X_j de \mathbf{X} no están correlacionados $u(x_i, x_j) = 0$.

NOTA 2 Las covarianzas también se conocen como incertidumbres mutuas.

NOTA 3 La matriz de incertidumbre también se conoce como matriz de covarianzas o matriz de varianzas-covarianzas.

3.12

intervalo de cobertura

intervalo que contiene el valor de una magnitud, con una probabilidad declarada, basada en la información disponible.

NOTA 1 El intervalo de cobertura a veces se denomina intervalo creíble o de certeza o intervalo bayesiano.

NOTA 2 En general, existe más de un intervalo de cobertura para una probabilidad establecida.

NOTA 3 Un intervalo de cobertura no debe denominarse "intervalo de confianza" para evitar confusión con el concepto estadístico [GUM: 1995, 6.2.2].

NOTA 4 Esta definición difiere de la del VIM, 3ª Edición (2008), ya que el término "valor verdadero" no se utiliza en este Suplemento por las razones mencionadas en la GUM [GUM: 1995, E.5].

3.13

probabilidad de cobertura

probabilidad de que el valor de una magnitud esté contenido dentro de un intervalo de cobertura especificado.

NOTA La probabilidad de cobertura a veces se denomina "nivel de confianza" [GUM: 1995, 6.2.2].

3.14

amplitud de un intervalo de cobertura

diferencia entre los valores máximo y mínimo de un intervalo de cobertura.

3.15

intervalo de cobertura con probabilidad simétrica

intervalo de cobertura para una magnitud tal que la probabilidad de que la magnitud sea menor que el valor mínimo del intervalo es igual a la probabilidad de que la magnitud sea mayor que el valor máximo del intervalo.

3.16

menor intervalo de cobertura

intervalo de cobertura para una magnitud con la menor amplitud de entre todos los intervalos de cobertura para dicha magnitud con la misma probabilidad de cobertura.

3.17

propagación de distribuciones

método utilizado para determinar la distribución de probabilidad de una magnitud de salida a partir de las distribuciones de probabilidad asignadas a las magnitudes de entrada de las que ésta depende.

NOTA El método puede ser analítico o numérico, exacto o aproximado.

3.18

enfoque GUM sobre la incertidumbre

aplicación de la ley de propagación de la incertidumbre y caracterización de la magnitud de salida mediante una distribución gaussiana o una distribución t , con el fin de obtener un intervalo de cobertura.

3.19

método de Monte Carlo

método para la propagación de distribuciones a partir de un muestreo aleatorio de distribuciones de probabilidad.

3.20

tolerancia numérica

semiamplitud del menor intervalo que contiene todos los números que pueden expresarse correctamente mediante un número especificado de cifras decimales significativas.

EJEMPLO Todos los números mayores que 1,75 y menores que 1,85 pueden expresarse mediante dos cifras decimales como 1,8. La tolerancia numérica es $(1,85 - 1,75) / 2 = 0,05$.

NOTA Para el cálculo de la tolerancia numérica asociada a un valor numérico, véase el apartado 7.9.2.

4 Convenciones y notación

A los efectos de este Suplemento se adoptan las siguientes convenciones y notación.

4.1 El modelo matemático de medición [GUM: 1995, 4.1] de una magnitud simple (escalar) puede expresarse como una relación funcional f :

$$Y = f(\mathbf{X}) \tag{1}$$

donde Y es una magnitud escalar de salida y \mathbf{X} representa las N magnitudes de entrada $(X_1, \dots, X_N)^T$. Cada X_i se considera como una variable aleatoria con ξ_i valores posibles y esperanza matemática x_i . Y es una variable aleatoria con η valores posibles y esperanza matemática y .

Suplemento 1 de la GUM, traducción al español 2010

NOTA 1 Se utiliza el mismo símbolo para la magnitud física y para la variable aleatoria que la representa (véase [GUM: 1995, 4.1.1 Nota 1]).

NOTA 2 Muchos modelos de medición pueden expresarse en la forma (1). Una forma más general es:

$$h(Y, \mathbf{X}) = 0,$$

lo que implícitamente relaciona \mathbf{X} e Y . En cualquier caso, para aplicar el método descrito de Monte Carlo, únicamente es necesario que pueda formarse la Y correspondiente a cualquier \mathbf{X} significativa.

4.2 Este Suplemento se aparta de los símbolos empleados a menudo para la “FDP” y la “función de distribución” [24]. La GUM utiliza el símbolo genérico f para referirse a un modelo y a una FDP. Como consecuencia de este uso, en la GUM se crea un poco de confusión. La situación en este Suplemento es diferente. Los conceptos de modelo, FDP y función de distribución son fundamentales para seguir y establecer la orientación que aquí se proporciona. Por lo tanto, en lugar de los símbolos f y F para indicar una FDP y una función de distribución, se utilizan los símbolos g y G respectivamente. Estos símbolos se indexan adecuadamente para designar la magnitud en cuestión. El símbolo f queda reservado para el modelo.

NOTA Las definiciones del apartado 3 relacionadas con las FDP y las distribuciones han sido adaptadas en consecuencia.

4.3 En este Suplemento se asigna una FDP a una magnitud, que puede ser una magnitud sencilla (escalar) X o una magnitud vectorial \mathbf{X} . Si es escalar, la FDP de X se indica por $g_X(\xi)$, donde ξ es una variable que describe los valores posibles de X . Esta X se considera como una variable aleatoria con esperanza matemática $E(X)$ y varianza $V(X)$ (véanse los apartados 3.6 y 3.7).

4.4 En el caso vectorial, la FDP de \mathbf{X} se indica por $g_{\mathbf{X}}(\xi)$, donde $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)^T$ es una variable vectorial que describe los valores posibles de la magnitud vectorial \mathbf{X} . Esta \mathbf{X} se considera una variable vectorial aleatoria con esperanza matemática $E(\mathbf{X})$ (vector) y matriz de covarianza $V(\mathbf{X})$.

4.5 Una FDP para más de una magnitud de entrada, a menudo se denomina conjunta, aun cuando todas las magnitudes de entrada sean independientes.

4.6 Cuando los elementos X_i de \mathbf{X} son independientes, la FDP de X_i se indica en la forma $g_{x_i}(\xi_i)$.

4.7 La FDP de Y se representa por $g_Y(\eta)$ y la función de distribución de Y por $G_Y(\eta)$.

4.8 En el cuerpo de este Suplemento, una magnitud se identifica generalmente por una letra mayúscula y la esperanza matemática de la magnitud, o una estimación de ésta, por la correspondiente letra minúscula. Por ejemplo, la esperanza matemática o una estimación de la magnitud Y se indicaría por y . Esta notación es bastante inadecuada para las magnitudes físicas, debido al uso establecido de símbolos específicos, por ejemplo, T para la temperatura y t para el tiempo. Por tanto, en algunos de los ejemplos (apartado 9), se utiliza una notación diferente. En estos casos, la magnitud se expresa por su símbolo convencional y su esperanza o estimación, por el mismo símbolo con sombrero (^). Por ejemplo, la magnitud que representa la desviación de la

longitud de un bloque patrón en calibración, respecto de su longitud nominal (véase el apartado 9.5), se representa por δL y una estimación de δL por $\hat{\delta L}$.

NOTA El símbolo con sombrero se utiliza generalmente en textos estadísticos para representar una estimación.

4.9 En este Suplemento, la expresión "ley de propagación de la incertidumbre" se aplica para la aproximación al modelo mediante la serie de Taylor de primer orden. La expresión se adapta en consecuencia cuando se utiliza una aproximación de mayor orden.

4.10 El subíndice "c" [GUM: 1995, 5.1.1] para la incertidumbre típica combinada es redundante en este Suplemento. La incertidumbre típica asociada a una estimación y de una magnitud de salida Y , se puede escribir, por lo tanto, como $u(y)$, pero el uso de $u_c(y)$ sigue siendo aceptable si resulta útil para enfatizar que representa una incertidumbre típica combinada. El calificativo "combinada" en este contexto también se considera superfluo y puede omitirse: la presencia de "y" en " $u(y)$ " ya indica la estimación a la que está asociada la incertidumbre típica. Por otro lado, cuando los resultados de una o más evaluaciones de incertidumbre se convierten en entradas para una posterior evaluación de la incertidumbre, el uso del subíndice "c" y del calificativo "combinada" resultan inadecuados.

4.11 A lo largo de este Suplemento se usan las denominaciones "intervalo de cobertura" y "probabilidad de cobertura". La GUM utiliza el término "nivel de confianza" ("level of confidence", en inglés) como sinónimo de probabilidad de cobertura, estableciendo una distinción entre "level of confidence" y "confidence level" [GUM: 1995, 6.2.2], porque este último tiene una definición específica en estadística. Dado que, en algunos idiomas, la traducción de estos dos términos ingleses es única, en este documento se evita su uso.

4.12 De acuerdo con la Resolución 10 de la 22ª CGPM (2003) "... el signo decimal será el punto en la línea o la coma en la línea...". El JCGM ha decidido adoptar, en sus documentos en inglés, el punto en la línea.³

4.13 A menos que se especifique de otro modo, los números se expresan de forma que indiquen el número de cifras significativas.

EJEMPLO Los números 0,060; 0,60; 6,0 y 60 están expresados con dos cifras significativas. Los números 0,06; 0,6; 6 y 6×10^1 están expresados con una cifra significativa. Sería incorrecto expresar 6×10^1 como 60, ya que daría a entender dos cifras significativas.

4.14 Algunos símbolos tienen más de un significado en este Suplemento. Véase el anexo G. El contexto aclara el uso.

4.15 En este Suplemento se utilizan las siguientes abreviaturas:

CGPM Conferencia General de Pesas y Medidas
IEEE Instituto de Ingenieros Electrónicos y Eléctricos
EGUM Enfoque GUM sobre la incertidumbre

³ En esta traducción al español se utiliza la coma en la línea.

JCGM	Comité Mixto de Guías de Metrología
GUM	Guía para la Expresión de la Incertidumbre de Medida
MMC	Método de Monte Carlo
FDP	Función de Densidad de Probabilidad
VIM	Vocabulario Internacional de términos fundamentales y generales de Metrología

5 Principios básicos

5.1 Fases principales de la evaluación de la incertidumbre

5.1.1 Las fases principales de la evaluación de la incertidumbre son formulación, propagación y resumen:

a) *Formulación*:

- 1º definir la magnitud de salida Y , la magnitud a medir (el mensurando);
- 2º determinar las magnitudes de entrada $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)^T$ de las que depende Y ;
- 3º desarrollar un modelo que relacione Y y \mathbf{X} ;
- 4º a partir de los conocimientos disponibles, asignar las FDP —gaussiana (normal), rectangular (uniforme), etc.— a X_i . Asignar una FDP conjunta a aquellas X_i que no son independientes;

b) *Propagación*: propagar las FDP de las X_i mediante el modelo para obtener la FDP de Y ;

c) *Resumen*: utilizar la FDP de Y para obtener:

- 1º la esperanza matemática de Y , considerada como una estimación y de la magnitud,
- 2º la desviación típica de Y , considerada como la incertidumbre típica $u(y)$ asociada a y [GUM: 1995, E.3.2];
- 3º un intervalo de cobertura que contenga Y con una probabilidad específica (la probabilidad de cobertura).

NOTA 1 La esperanza matemática puede no ser apropiada para todas las aplicaciones (véase [GUM: 1995 4.1.4]).

NOTA 2 Las magnitudes descritas por algunas distribuciones, como la distribución de Cauchy, no tienen esperanza matemática ni desviación típica. Sin embargo, siempre podrá obtenerse un intervalo de cobertura para la magnitud de salida.

5.1.2 El enfoque GUM no hace referencia explícita a la asignación de las FDP a las magnitudes de entrada. Sin embargo [GUM: 1995, 3.3.5], "...una incertidumbre típica Tipo A se obtiene a partir de una función de densidad de probabilidad... derivada de una distribución de frecuencia observada..., mientras una incertidumbre típica Tipo B se obtiene a partir de una función de densidad de probabilidad asumida, basada en el grado de confianza de que se produzca un determinado suceso... Ambas aproximaciones emplean interpretaciones de probabilidad reconocidas".

NOTA La utilización de distribuciones de probabilidad en una evaluación de incertidumbre Tipo B es una característica de inferencia bayesiana [21, 27]. Se continúa investigando [22] sobre los límites de validez en la asignación de grados de libertad a una incertidumbre típica basada en la fórmula de Welch-Satterthwaite.

5.1.3 El metrologo es quien lleva a cabo las etapas en la fase de formulación, en ocasiones con el asesoramiento de expertos. Este Suplemento orienta sobre la asignación de FDP (etapa 4 de la fase a) en el apartado 5.1.1) en algunos casos habituales (véase el apartado 6.4). Las fases de propagación y resumen, b) y c) en el apartado 5.1.1, para las que aquí se presenta una orientación detallada, no requieren información metrológica adicional y, en principio, pueden llevarse a cabo para cualquier tolerancia numérica requerida por el problema especificado en la fase de formulación.

NOTA Una vez concluida la fase de formulación a) en el apartado 5.1.1, la FDP para la magnitud de entrada queda completamente especificada matemáticamente pero, por lo general, el cálculo de la esperanza matemática, de la desviación típica y de los intervalos de cobertura requiere métodos numéricos que implican un determinado nivel de aproximación.

5.2 Propagación de distribuciones

En el presente Suplemento se establece una aproximación generalmente eficaz para determinar (una aproximación numérica a) la función de distribución

$$G_Y(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} g_Y(z) dz$$

para la Y considerada. Se basa en la aplicación del método de Monte Carlo (MMC) para llevar a cabo la propagación de distribuciones (véase 5.9).

NOTA Una definición formal [9] para la FDP de Y es:

$$g_Y(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g_X(\xi) \delta(\eta - f(\xi)) d\xi_N \dots d\xi_1,$$

donde $\delta(\cdot)$ indica la función delta de Dirac. Generalmente esta integral múltiple no puede evaluarse analíticamente. Puede aplicarse una regla de integración numérica para obtener una aproximación a $g_Y(\eta)$, pero no es una propuesta eficaz.

5.3 Resumen de la obtención de información

5.3.1 Una estimación y de Y es la esperanza matemática $E(Y)$. La incertidumbre típica $u(y)$ asociada a y viene dada por la desviación típica de Y, la raíz cuadrada con signo positivo de la varianza $V(Y)$ de Y.

5.3.2 Un intervalo de cobertura de Y se puede determinar a partir de $G_Y(\eta)$. Si α representa cualquier valor numérico comprendido entre cero y $1 - p$, donde p es la probabilidad de cobertura requerida, los puntos extremos de un intervalo de cobertura $100p$ % de Y son $G_Y^{-1}(\alpha)$ y $G_Y^{-1}(p + \alpha)$, es decir, los percentiles α y $(p + \alpha)$ de $G_Y(\eta)$.

5.3.3 La elección de $\alpha = (1 - p) / 2$ da el intervalo de cobertura definido mediante los percentiles $(1 - p) / 2$ y $(1 + p) / 2$, proporcionando un intervalo de cobertura $100p$ % simétrico en cuanto a probabilidad.

NOTA Cuando se cumpla que la FDP de Y es simétrica alrededor de la estimación y , el intervalo de cobertura debería ser igual a $y \pm U_p$, donde la incertidumbre expandida [GUM: 1995, 2.3.5] U_p viene dada por el producto de la incertidumbre típica $u(y)$ y el factor de cobertura determinado para esa FDP. Por lo general, la FDP no se conoce analíticamente.

5.3.4 Si la FDP es asimétrica, puede resultar más apropiado elegir un valor de α distinto de $(1 - p) / 2$. En este caso, se puede utilizar el menor intervalo de cobertura $100p$ %. Éste presenta la propiedad de que, para una FDP unimodal, contiene la moda, el valor más probable de Y , la cual viene dada por el valor numérico de α que cumple la expresión: $g_Y(G_Y^{-1}(\alpha)) = g_Y(G_Y^{-1}(p + \alpha))$, si $g_Y(\eta)$ es unimodal, y en general el valor numérico de α hace que la expresión $G_Y^{-1}(p + \alpha) - G_Y^{-1}(\alpha)$ sea un mínimo.

5.3.5 El intervalo de cobertura $100p$ % simétrico respecto a la probabilidad y el menor intervalo de cobertura $100p$ % son idénticos para FDP simétricas, tales como la distribución gaussiana y la distribución t utilizadas en el enfoque GUM. Por lo tanto, comparando el enfoque GUM con otras aproximaciones, puede utilizarse cualquiera de los intervalos mencionados.

5.3.6 La Figura 1 refleja la función de distribución $G_Y(\eta)$ que corresponde a una FDP asimétrica. Las líneas verticales a trazos muestran los puntos extremos del intervalo de cobertura simétrico del 95 % y las líneas horizontales a trazos determinan los correspondientes puntos de probabilidad del 0,025 y 0,975 respectivamente. Las líneas continuas indican los puntos extremos del menor intervalo de cobertura del 95 % y los respectivos puntos de probabilidad, los cuales en este caso son 0,006 y 0,956. La amplitud de los intervalos de cobertura en los dos casos es 1,76 unidades y 1,69 unidades, respectivamente.

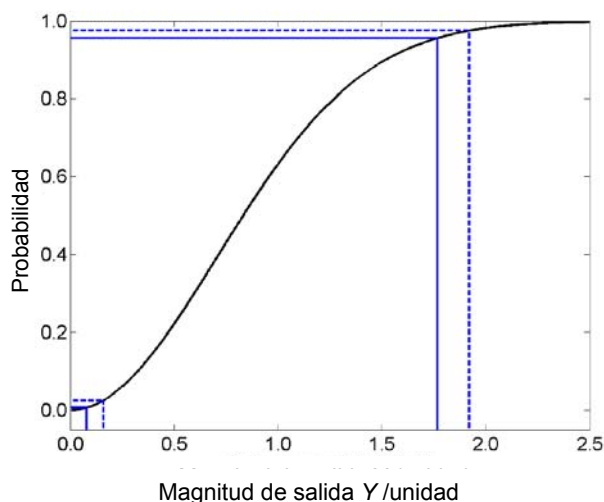


Figura 1- Una función de distribución $G_Y(\eta)$ correspondiente a una FDP asimétrica y los intervalos de cobertura del 95 % simétrico y menor (5.3.6). "Unidad" significa cualquier unidad.

5.4 Realización de la propagación de distribuciones

5.4.1 La propagación de distribuciones puede llevarse a cabo de diferentes formas:

- métodos analíticos, es decir, métodos que proporcionan una representación matemática de la FDP para Y ;

- b) propagación de incertidumbre basada en la sustitución del modelo por una aproximación basada en el desarrollo en serie de Taylor de primer orden [GUM: 1995, 5.1.2] (la ley de propagación de incertidumbres);
- c) como el apartado b), exceptuando que deben incluirse las contribuciones derivadas de los términos de mayor orden en la aproximación basada en el desarrollo en serie de Taylor [GUM: 1995, nota 5.1.2];
- d) métodos numéricos [GUM: 1995, G.1.5] que implementan la propagación de distribuciones, particularmente los que utilizan el MMC (véase el apartado 5.9).

NOTA 1 Los métodos analíticos resultan ideales ya que no introducen ninguna aproximación. Sin embargo, son aplicables únicamente en casos simples. Para consultar ejemplos y procedimientos véase [8,13]. Estos métodos no se consideran en el presente suplemento, excepto en los ejemplos (apartado 9) donde se muestran únicamente a efectos de comparación.

NOTA 2 El MMC se muestra aquí como un medio para proporcionar una representación numérica de la distribución de la magnitud de salida, en lugar de un método de simulación en sí mismo. Dentro del contexto en la fase de propagación de la evaluación de la incertidumbre, el problema a resolver es determinístico, debiendo simularse un proceso físico no aleatorio.

5.4.2 La GUM permite procedimientos para la evaluación de la incertidumbre distintos al enfoque GUM [GUM: 1995, G.1.5]. El procedimiento recomendado en el presente Suplemento, basado en la propagación de distribuciones, es general. En modelos lineales o linealizados y magnitudes de entrada para las que las FDP son gaussianas, el procedimiento conduce a resultados consistentes con el enfoque GUM. Sin embargo, en aquellos casos en que no se cumplan las condiciones de aplicación establecidas en el enfoque GUM (véanse los apartados 5.7 y 5.8), puede esperarse que el procedimiento del presente Suplemento conduzca a una declaración de incertidumbres válida.

5.4.3 En la fase de propagación deberá seleccionarse un método adecuado. Si se demuestra que se cumplen las condiciones necesarias para que el enfoque GUM proporcione resultados válidos, dicho método puede utilizarse. Si hay indicaciones de que el enfoque GUM puede no ser válido, deberá emplearse otro procedimiento. Puede surgir una tercera situación en la que resulte difícil asegurar la validez del enfoque GUM. En los tres casos, el MMC proporciona un método alternativo y práctico. En el primer caso, el MMC puede llegar a ser más fácil de aplicar debido, por ejemplo, a las dificultades para calcular los coeficientes de sensibilidad [GUM: 1995, 5.1.3]. En el segundo caso, el MMC generalmente puede dar resultados válidos, ya que no realiza hipótesis de aproximación. En el tercer caso, el MMC puede aplicarse, bien para determinar directamente los resultados o bien para valorar la calidad de los proporcionados por el enfoque GUM.

5.4.4 La propagación de las FDP $g_{x_i}(\xi_i)$, $i = 1, \dots, N$, para las magnitudes de entrada X_i mediante el modelo proporciona la FDP $g_Y(\eta)$ de la magnitud de salida Y , tal como se muestra en la Figura 2 para $N = 3$ X_i independientes. La Figura 2 puede compararse con la Figura 3 por la ley de propagación de incertidumbre. En la Figura 2, las $g_{x_i}(\xi_i)$, $i = 1, 2, 3$, son gaussianas, triangular y gaussiana, respectivamente. La función $g_Y(\eta)$ aparece como asimétrica, como generalmente ocurre en modelos no lineales o asimétricos $g_{x_i}(\xi_i)$.

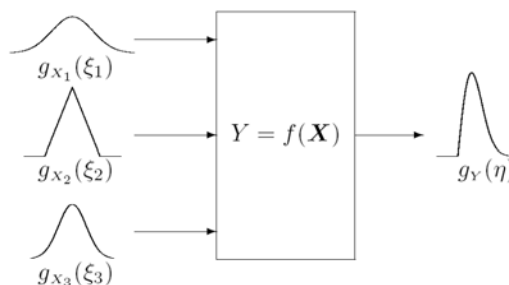


Figura 2 – Ilustración de la propagación de distribuciones para $N = 3$ magnitudes de entrada independientes (5.4.4)

5.4.5 En la práctica, únicamente en casos sencillos puede llevarse a cabo la propagación de distribuciones sin realizar aproximaciones. El enfoque GUM aplica un método aproximado y el MMC otro distinto. Para un pequeño pero importante subconjunto de problemas, el enfoque GUM es exacto. El MMC nunca lo es, pero es más válido que el enfoque GUM para un amplio tipo de problemas.

5.5 Informe de resultados

5.5.1 Si se sigue el método de propagación de distribuciones, es conveniente proporcionar la siguiente información:

- una estimación y de la magnitud de salida Y ;
- la incertidumbre típica $u(y)$ asociada a y ;
- la probabilidad de cobertura $100p$ % establecida (por ejemplo 95 %);
- los límites del intervalo de cobertura seleccionado $100p$ % para Y (por ejemplo intervalo de cobertura del 95 %);
- cualquier otra información relevante, por ejemplo, si el intervalo de cobertura es simétrico con respecto a la probabilidad o si se trata del menor intervalo de cobertura.

5.5.2 Los valores de y , $u(y)$ y los límites del intervalo de cobertura $100p$ % de Y deberán indicarse con un número de dígitos decimales tal que el menos significativo se encuentre en la misma posición que en $u(y)$, con respecto a la coma decimal [GUM: 1995, 7.2.6]. Para representar de forma adecuada $u(y)$ suele ser suficiente emplear uno o dos dígitos decimales significativos.

NOTA 1 Cada valor numérico comunicado se obtiene habitualmente mediante redondeo al mayor número de dígitos decimales significativos.

NOTA 2 Un factor que influye en la elección de uno o dos dígitos decimales significativos es el valor del primero de ellos en $u(y)$. Si este dígito es 1 ó 2, la desviación del valor numérico considerado de $u(y)$ respecto a su valor antes del redondeo es grande; sin embargo, si el primer dígito decimal significativo es 9, la desviación es relativamente pequeña.

NOTA 3 Si los resultados van a ser utilizados para cálculos posteriores, debe considerarse la conveniencia de mantener o no los dígitos decimales adicionales.

EJEMPLO Los resultados de $u(y)$, declarados con dos dígitos decimales significativos, para un caso en el que el intervalo de cobertura es asimétrico con respecto a y , son:

$$y = 1,024 \text{ V}, \quad u(y) = 0,028 \text{ V},$$

menor intervalo de cobertura del 95 % = [0,983, 1,088] V.

Los mismos resultados de $u(y)$ declarados con un dígito decimal significativo serían:

$$y = 1,02 \text{ V}, \quad u(y) = 0,03 \text{ V},$$

menor intervalo de cobertura del 95 % = [0,98, 1,09] V.

5.6 Enfoque GUM

5.6.1 La GUM proporciona una orientación general sobre variados aspectos del proceso de evaluación de la incertidumbre establecido en el apartado 5.1.1. La GUM también proporciona orientación sobre las fases de propagación y resumen de la evaluación de la incertidumbre. El enfoque GUM ha sido adoptado por numerosas organizaciones, es ampliamente utilizado, y se aplica en normas y guías sobre la incertidumbre de medida y también en programas informáticos.

5.6.2 El enfoque GUM comprende varias fases que se describen más adelante. Cada modelo de magnitud de entrada X_i se representa por su esperanza matemática y su desviación típica, obtenidas de la FDP para esa magnitud [GUM: 1995, 4.1.6]. La esperanza matemática se considera la mejor estimación x_i de X_i y la desviación típica, la incertidumbre típica $u(x_i)$ asociada a x_i . Esta información se propaga utilizando la ley de propagación de incertidumbres [GUM: 1995, 5.1.2], mediante una aproximación en serie de Taylor al modelo establecido, con términos de primer o mayor orden, proporcionando:

- una estimación y de la magnitud de salida Y ,
- la incertidumbre típica $u(y)$ asociada a y .

La estimación y viene dada por la evaluación del modelo en la x_i . Se establece un intervalo de cobertura para Y basándose en considerar la FDP de Y como gaussiana o, si los grados de libertad asociados a $u(y)$ son finitos [GUM: 1995, G], como una distribución t .

NOTA La información sobre las X_i incluye, en su caso, los grados de libertad asociados a $u(x_i)$ [GUM: 1995, 4.2.6]. También debe incluir, en su caso, las covarianzas asociadas a pares de x_i [GUM: 1995, 5.2.5].

5.6.3 Las fases de propagación y resumen en el enfoque GUM (fases b) y c) en 5.1.1) consta de las etapas de cálculo que figuran a continuación. La Figura 3 muestra la ley de propagación de incertidumbres para un modelo con $N = 3$ magnitudes de entrada independientes $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$, las cuales se estiman mediante x_i con sus incertidumbres típicas asociadas $u(x_i)$, $i = 1, 2, 3$. La magnitud de salida Y se estima mediante y , con su incertidumbre típica asociada $u(y)$.

- Obtener las esperanzas matemáticas $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)^T$ y las desviaciones típicas (incertidumbres típicas) $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = [u(x_1), \dots, u(x_N)]^T$ a partir de las FDP para las magnitudes de entrada $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)^T$. Utilizar la FDP combinada de \mathbf{X} si los pares de X_i no son independientes (en cuyo caso tienen covarianza no nula).
- Establecer los grados de libertad (finitos o infinitos) asociados a cada $u(x_i)$.
- Obtener la covarianza (incertidumbre mutua) $u(x_i, x_j)$ asociada a x_i y x_j para cada par i, j , a partir de la FDP conjunta de X_i y X_j , para los X_i y X_j que no son independientes.
- Establecer las derivadas parciales de primer orden de $f(\mathbf{X})$ con respecto a \mathbf{X} .

- e) Calcular y , evaluando para \mathbf{x} el modelo diseñado para \mathbf{X} .
- f) Calcular los coeficientes de sensibilidad del modelo [GUM: 1995, 5.1.3] como las derivadas parciales anteriores evaluadas para \mathbf{x} .
- g) Calcular la incertidumbre típica $u(y)$ combinando $u(\mathbf{x})$, las $u(x_i, x_j)$ y los coeficientes de sensibilidad del modelo [GUM: 1995, fórmulas (10), (13)].
- h) Calcular ν_{ef} , los grados de libertad efectivos asociados a $u(y)$, utilizando la fórmula de Welch-Satterthwaite [GUM: 1995, fórmula (G.2b)].
- i) Calcular la incertidumbre expandida U_p y el intervalo de cobertura de Y (para una probabilidad de cobertura específica p), considerada como una variable aleatoria, obteniendo el factor multiplicador apropiado de $u(y)$ a partir de la distribución de probabilidad de $(Y-y) / u(y)$, como distribución gaussiana ($\nu_{\text{ef}} = \infty$) o como distribución t ($\nu_{\text{ef}} < \infty$).

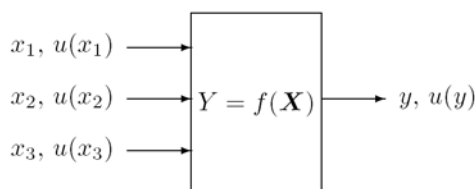


Figura 3 — Ilustración de la ley de propagación de incertidumbres para $N=3$ magnitudes de entrada independientes (5.4.4, 5.6.3)

5.7 Condiciones para la aplicación válida del enfoque GUM en modelos lineales

5.7.1 No es necesaria ninguna condición para la aplicación válida de la ley de propagación de incertidumbres a modelos lineales (modelos que son lineales en X_i).

5.7.2 Se puede determinar un intervalo de cobertura, a partir de la información proporcionada por la GUM, bajo las siguientes condiciones:

- a) la fórmula de Welch-Satterthwaite resulta adecuada para calcular los grados de libertad efectivos asociados a $u(y)$ [GUM: 1995, G.4.1], cuando una o más de las $u(x_i)$ tienen unos grados de libertad asociados de valor finito;
- b) las X_i son independientes cuando los grados de libertad asociados a las $u(x_i)$ son de valor finito;
- c) la FDP de Y puede aproximarse adecuadamente mediante una distribución gaussiana o una distribución t .

NOTA 1 Es necesario que se cumpla la condición a) para que Y pueda caracterizarse por una distribución t .

NOTA 2 Es necesario que se cumpla la condición b) ya que la GUM no considera las X_i que no son independientes con un número finito de grados de libertad.

NOTA 3 La condición c) se cumple cuando cada X_i tiene asignada una distribución gaussiana. También se cumple cuando se satisfacen las condiciones del teorema del límite central [GUM: 1995, G.2].

NOTA 4 El enfoque GUM puede no ser aplicable cuando exista una X_i , cuya distribución asignada no sea gaussiana y la contribución correspondiente a $u(y)$ sea dominante.

5.7.3 Cuando se cumplen las condiciones del apartado 5.7.2, puede suponerse que los resultados de la aplicación del enfoque GUM son válidos para modelos lineales. Tales condiciones se dan en numerosas circunstancias.

5.8 Condiciones para la aplicación válida del enfoque GUM en modelos no lineales

5.8.1 La ley de propagación de incertidumbres puede aplicarse en modelos no lineales siempre que se cumplan las siguientes condiciones:

- a) que f sea diferenciable de forma continua con respecto a los elementos X_i de \mathbf{X} en el entorno de las mejores estimaciones x_i de X_i ;
- b) que la condición a) pueda aplicarse a todas las derivadas hasta el orden apropiado;
- c) que las X_i correspondientes a los términos significativos de mayor orden de una aproximación en serie de Taylor de $f(\mathbf{X})$ sean independientes;
- d) que las FDP asignadas a las X_i correspondientes a los términos de mayor orden de una aproximación en serie de Taylor de $f(\mathbf{X})$ sean gaussianas;
- e) que los términos de mayor orden no incluidos en la aproximación en serie de Taylor de $f(\mathbf{X})$ sean despreciables.

NOTA 1 La condición a) es necesaria para poder aplicar la ley de propagación de incertidumbres basada en una aproximación en serie de Taylor de primer orden de $f(\mathbf{X})$ cuando la no linealidad de f es despreciable [GUM: 1995, 5.1.2].

NOTA 2 La condición b) es necesaria para la aplicación de la ley de propagación de incertidumbres basada en una aproximación en serie de Taylor de mayor orden de $f(\mathbf{X})$ [GUM: 1995, 5.1.2]. En la GUM se establece una expresión para los términos más significativos de orden superior que deben incluirse [GUM: 1995, nota 5.1.2].

NOTA 3 La condición c) se refiere a la afirmación de la GUM [GUM: 1995, nota 5.1.2] relativa a un modelo no lineal en el caso de X_i independientes. La GUM, en este contexto, no considera X_i que no sean independientes.

NOTA 4 La condición d) constituye una corrección a la afirmación de la GUM [GUM: 1995, nota 5.1.2] de que la versión de la ley de propagación de incertidumbres que utiliza términos de orden superior, se basa en la simetría de las FDP de X_i [19, 27].

NOTA 5 Si la determinación analítica de las derivadas de mayor orden resulta difícil o puede dar lugar a que se cometan errores, especialmente cuando la no linealidad del modelo es significativa, puede utilizarse un software adecuado. Alternativamente, estas derivadas se pueden aproximar numéricamente por diferencias finitas [5]. (La GUM proporciona una fórmula de diferencias finitas para derivadas parciales de primer orden [GUM: 1995, 5.1.3 nota 2].) Sin embargo, debe tenerse especial cuidado cuando se forman diferencias entre valores del modelo muy próximos numéricamente por los efectos de cancelación de términos.

5.8.2 Según el enfoque GUM, puede determinarse un intervalo de cobertura cuando se cumplan las condiciones b) y c) del apartado 5.7.2, sustituyendo el contenido de la nota 3 por la siguiente afirmación: "la condición c) es necesaria al objeto de que los intervalos de cobertura puedan determinarse a partir de esas distribuciones".

5.8.3 Siempre que se mantengan las condiciones de los apartados 5.8.1 y 5.8.2, la aplicación del enfoque GUM para modelos no lineales se supondrá válida. Tales condiciones se dan en numerosas circunstancias.

5.9 La aproximación Monte Carlo a las fases de propagación y resumen

5.9.1 El MMC proporciona una aproximación general para obtener una representación numérica aproximada \mathbf{G} de la función de distribución $G_Y(\eta)$ de Y [32, página 75]. El punto clave de la propuesta es muestrear repetidamente a partir de las FDP de las X_i y evaluar el modelo en cada caso.

5.9.2 Puesto que $G_Y(\eta)$ codifica toda la información conocida acerca de Y , cualquier propiedad de Y tales como la esperanza matemática, la varianza y los intervalos de cobertura pueden aproximarse utilizando \mathbf{G} . La calidad de estos resultados mejora al aumentar del número de veces que se muestrean las FDP.

5.9.3 Las esperanzas matemáticas y varianzas (y momentos de mayor orden) se pueden determinar directamente a partir del conjunto de valores obtenidos del modelo. La determinación de intervalos de cobertura exige que estos valores del modelo estén ordenados.

5.9.4 Si y_r , para $r = 1, \dots, M$, representa valores del modelo de una distribución de probabilidad de Y muestreados independientemente, entonces la esperanza matemática $E(Y)$ y la varianza $V(Y)$ pueden aproximarse utilizando los y_r . En general, los momentos de Y (incluyendo $E(Y)$ y $V(Y)$) se aproximan para aquellos valores del modelo muestreados. M_{y_0} indica el número de y_r que no son superiores a cualquier número prefijado y_0 . La probabilidad $\Pr(Y \leq y_0)$ se aproxima mediante M_{y_0}/M . De esta forma, y_r proporciona una función escalón (tipo histograma) aproximada a la función de distribución $G_Y(\eta)$.

5.9.5 Cada y_r se obtiene mediante el muestreo aleatorio de cada una de las FDP de X_i y la evaluación del modelo para los valores obtenidos del muestreo. La salida primaria del MMC, \mathbf{G} , está formada por los y_r dispuestos en orden estrictamente creciente.

NOTA Es improbable que se obtengan y_r iguales pero, si se diera el caso, la introducción de perturbaciones mínimas adecuadas sobre los y_r les permitiría disponerse en orden estrictamente creciente. Véase el apartado 7.5.1.

5.9.6 La Figura 4 muestra esquemáticamente el MMC como una aplicación de la propagación de distribuciones a M de ellas obtenidas a priori (véase por otra parte 7.9). El MMC puede establecerse como un procedimiento paso a paso:

- a) seleccionar el número M de reiteraciones de Monte Carlo a realizar. Véase el apartado 7.2;
- b) generar M vectores, mediante muestreo de las FDP asignadas, como realizaciones de las (conjunto de N) magnitudes de entrada X_i . Véase el apartado 7.3;
- c) deducir el correspondiente valor de Y del modelo para cada uno de dichos vectores obteniendo los M valores del modelo. Véase el apartado 7.4;
- d) clasificar dichos M valores del modelo en orden estrictamente creciente, utilizando estos valores ordenados para obtener \mathbf{G} . Véase el apartado 7.5;
- e) utilizar \mathbf{G} para deducir una estimación y de Y y la incertidumbre típica $u(y)$ asociada a y . Véase el apartado 7.6;

- f) utilizar \mathbf{G} para deducir un intervalo de cobertura adecuado para Y , para una probabilidad de cobertura específica p . Véase el apartado 7.7.

NOTA 1 El apartado 6.4 y el anexo C proporcionan información acerca del muestreo a partir de las distribuciones de probabilidad.

NOTA 2 Matemáticamente, la media de los M valores del modelo es la realización de una variable aleatoria con esperanza matemática $E(Y)$ y varianza $V(Y) / M$. Por ello, es de esperar que la relación entre dicha media y $E(Y)$ sea proporcional a $M^{-1/2}$.

NOTA 3 El paso e) puede llevarse a cabo del mismo modo utilizando los M valores del modelo de Y sin clasificar. Pero sí será necesario clasificar estos valores del modelo para determinar el intervalo de cobertura en el paso f).

5.9.7 La eficacia del MMC para determinar y , $u(y)$ y un intervalo de cobertura de Y depende de la utilización de un valor de M adecuadamente grande (paso a) del apartado 5.9.6). Una orientación sobre cómo obtener tal valor y , en general, sobre cómo utilizar el MMC se encuentra en la referencia [7]. Véanse también los apartados 7.2 y 7.9.

5.10 Condiciones para la aplicación válida del método de Monte Carlo descrito

5.10.1 La propagación de distribuciones realizada mediante el MMC, así como la información resumen determinada a continuación, son válidas a partir de la aproximación propuesta en el presente Suplemento, bajo las siguientes condiciones:

- a) f es continua con respecto a los elementos X_i de \mathbf{X} en el entorno de las mejores estimaciones x_i de las X_i ;
- b) la función de distribución de Y es continua y estrictamente creciente;
- c) la FDP de Y es:
- 1º continua en todo el intervalo para el que esta FDP es estrictamente positiva,
 - 2º unimodal (un único máximo),
 - 3º estrictamente creciente (o cero) a la izquierda del máximo y estrictamente decreciente (o cero) a la derecha del máximo;
- d) existen $E(Y)$ y $V(Y)$;
- e) se utiliza un valor suficientemente grande de M .

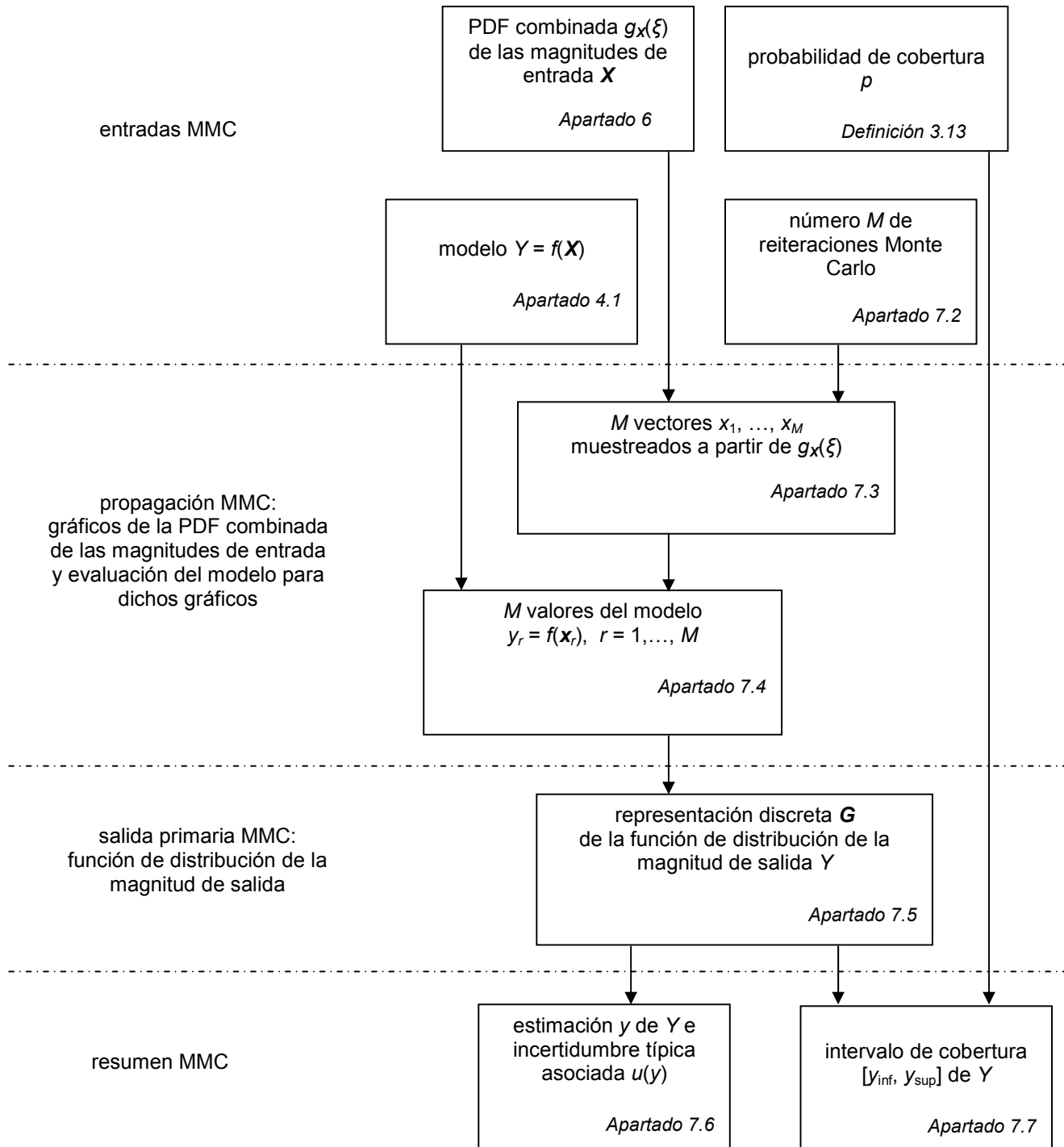


Figura 4 — Fases de propagación y resumen de la evaluación de la incertidumbre utilizando el MMC para la propagación de distribuciones (5.9.6, 7.1)

Suplemento 1 de la GUM, traducción al español 2010

NOTA 1 Con respecto a la condición a), no se requieren condiciones para las derivadas de f .

NOTA 2 Las condiciones a) y b) son necesarias para asegurar que la inversa de la función de distribución es única y que por lo tanto pueden determinarse los intervalos de cobertura. Si no se requiere un intervalo de cobertura, sólo se necesita la condición a).

NOTA 3 La condición c) se necesita únicamente si debe determinarse el intervalo de cobertura más pequeño. En tal caso, es necesaria para asegurar que el menor intervalo de cobertura correspondiente a la probabilidad de cobertura estipulada es único. El pico máximo puede coincidir con un punto extremo del intervalo para el cual esta FDP es estrictamente positiva: en tal caso, una de las dos condiciones en 3) carece de sentido.

NOTA 4 La condición d) se necesita para la convergencia (estocástica) del MMC a medida que el número M de reiteraciones va incrementándose (véase el apartado 7.2).

NOTA 5 La condición e) es necesaria para asegurar que la información resumen es fiable. Véase el apartado 8.2.

5.10.2 Es de esperar que los resultados de la propagación de distribuciones según el MMC sean válidos, siempre que se satisfagan las condiciones del apartado 5.10.1. Estas condiciones son menos restrictivas que las exigidas (véanse los apartados 5.7 y 5.8) para la aplicación del enfoque GUM.

5.11 Comparación entre el enfoque GUM y el método de Monte Carlo descrito

5.11.1 El objetivo del presente apartado es comparar los principios en los que se basan el enfoque GUM y el MMC como una realización de la propagación de distribuciones. Este apartado también proporciona algunas razones para utilizar el MMC en aquellas circunstancias en las cuales sea cuestionable la validez de la aplicación del enfoque GUM.

5.11.2 A efectos de comparar el enfoque GUM y el MMC, es útil revisar las consideraciones de la GUM relativas a las evaluaciones de incertidumbre Tipo A y Tipo B. Para la evaluación Tipo A, la GUM proporciona una guía para la obtención de la mejor estimación de una magnitud y su incertidumbre típica asociada a partir de la media y de la desviación típica de un conjunto de indicaciones de la magnitud, obtenidas independientemente. Para la evaluación Tipo B, el conocimiento previo relativo a la magnitud se utiliza para caracterizarla mediante una FDP, a partir de la cual se determinan la mejor estimación de la magnitud y su incertidumbre típica asociada. La GUM establece que ambos tipos de evaluación están basados en distribuciones de probabilidad [GUM: 1995, 3.3.4] y que ambas aproximaciones emplean interpretaciones admitidas sobre la probabilidad [GUM: 1995, 3.3.5]. La GUM considera las FDP como base para la evaluación de la incertidumbre: en el contexto de la ley de propagación de incertidumbres, hace referencia explícita a las magnitudes de entrada y salida como definidas y caracterizadas mediante distribuciones de probabilidad [GUM: 1995, G.6.6]. Véase también el apartado 5.1.2.

5.11.3 El enfoque GUM no determina explícitamente una FDP para la magnitud de salida. Sin embargo, la distribución de probabilidad utilizada por dicho enfoque para caracterizar la magnitud de salida es a veces referida en el presente Suplemento como “proporcionada por” o “resultando del” enfoque GUM.

5.11.4 El presente Suplemento intenta proporcionar una aproximación que sea lo más coherente posible con la GUM, especialmente en lo relativo al uso de las FDP para todas las magnitudes, pero desviándose de ella, en su caso, de forma claramente identificada. Estas desviaciones son:

a) las FDP están explícitamente asignadas a todas las magnitudes de entrada X_i (en lugar de asociar incertidumbres típicas con estimaciones x_i de X_i) basándose en la información relativa a

dichas magnitudes. No se necesita la clasificación en evaluaciones de incertidumbre tipo A y Tipo B;

- b) los coeficientes de sensibilidad [GUM: 1995, 5.1.3] no son una parte inherente de la aproximación de este suplemento y , por lo tanto, no se requiere el cálculo o la aproximación numérica de las derivadas parciales del modelo con respecto a las X_i . Sin embargo, se pueden dar aproximaciones de los coeficientes de sensibilidad que correspondan a tomar todos los términos de orden superior en el desarrollo en serie de Taylor del modelo considerado (anexo B);
- c) se obtiene una representación numérica de la función de distribución de Y definida completamente a partir del modelo y de las FDP de X_i , y no limitadas a una distribución gaussiana o a una distribución t ;
- d) dado que la FDP de Y no es en general simétrica, un intervalo de cobertura de Y no queda necesariamente centrado en la estimación de Y . Por tanto, es necesario reflexionar a la hora de la elección del intervalo de cobertura correspondiente a una probabilidad de cobertura específica.

5.11.5 Puesto que explícitamente el enfoque GUM utiliza únicamente las mejores estimaciones x_i y sus incertidumbres asociadas (y en caso apropiado covarianzas y grados de libertad), queda limitada la información que se puede proporcionar acerca de Y . Esencialmente queda limitada a proporcionar una estimación y de Y y la incertidumbre típica $u(y)$ asociada a y , y quizás los referidos grados efectivos de libertad. Los valores de y y $u(y)$ serán válidos para un modelo lineal en X . Cualquier otra información acerca de Y , por ejemplo intervalos de cobertura, se obtiene utilizando hipótesis adicionales, como que la distribución de Y es gaussiana o una distribución t .

5.11.6 Algunas características del MMC son:

- a) menor esfuerzo en el análisis necesario para modelos no lineales o complejos, dado que no se necesitan las derivadas parciales de primer orden u orden superior utilizadas para proporcionar los coeficientes de sensibilidad en la ley de propagación de incertidumbres;
- b) mejor estimación de Y en modelos no lineales, en general (véase [GUM: 1995, 4.1.4]);
- c) mejor incertidumbre típica asociada a la estimación de Y en modelos no lineales, especialmente cuando las X_i tengan asignadas FDP no gaussianas (por ejemplo asimétricas), sin la necesidad de proporcionar las derivadas de orden superior [GUM: 1995, nota 5.1.2];
- d) proporciona un intervalo de cobertura correspondiente a una probabilidad de cobertura estipulada en el caso de que la FDP de Y no pueda aproximarse de forma adecuada por una distribución gaussiana o por una distribución t , por ejemplo cuando no sea de aplicación el teorema del límite central [GUM: 1995, G.2.1, G.6.6]. Esta aproximación inadecuada puede originarse cuando (1) la FDP asignada a una X_i dominante no es una distribución gaussiana o una distribución t , (2) el modelo es no lineal, o (3) el error de aproximación originado al utilizar la fórmula de Welch-Satterthwaite para los grados efectivos de libertad no es despreciable;
- e) no es necesario un factor de cobertura [GUM: 1995, 2.3.6] cuando se determina un intervalo de cobertura.

6 Funciones de densidad de probabilidad para las magnitudes de entrada

6.1 Generalidades

6.1.1 Este apartado da una orientación sobre la asignación de las FDP, en algunas circunstancias habituales, a las magnitudes de entrada X_i en la etapa de formulación de la evaluación de la incertidumbre. Tal asignación puede estar basada en el teorema de Bayes [20] o en el principio de máxima entropía [8, 26, 51, 56].

NOTA En algunas circunstancias puede ser útil otra aproximación para la asignación de una FDP. En cualquier caso, como en toda disciplina científica, debe registrarse la justificación de la decisión.

6.1.2 En general, a las magnitudes de entrada $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)^T$ se les asigna una FDP conjunta $g_{\mathbf{X}}(\xi)$. Véase el apartado 6.4.8.4 nota 2.

6.1.3 Cuando las X_i son independientes, las FDP $g_{X_i}(\xi_i)$ se asignan individualmente, basándose en el análisis de una serie de indicaciones (evaluación Tipo A de la incertidumbre) o en el criterio científico a partir de informaciones existentes [50], tales como datos históricos, calibraciones y opiniones expertas (evaluación Tipo B de la incertidumbre) [GUM: 1995, 3.3.5].

6.1.4 Cuando algunas de las X_i son independientes entre sí, se les asignan FDP individuales y una FDP conjunta para el resto.

NOTA Es posible eliminar algunas o todas las dependencias reescribiendo las magnitudes de entrada relevantes en función de magnitudes de entrada independientes más fundamentales, de las que dependen las magnitudes de entrada iniciales [GUM: 1995, F1.2.4, H.1.2]. Dichos cambios pueden simplificar tanto la aplicación de la ley de propagación de incertidumbres como la propagación de las distribuciones. Se pueden consultar detalles y ejemplos en la referencia bibliográfica [15].

6.1.5 La información relativa a la asignación de las FDP a las X_i se incluye en la GUM [GUM: 1995, 4.3].

6.1.6 La orientación íntegra sobre la asignación de las FDP de forma individual o conjunta a las X_i está fuera del ámbito de aplicación de este Suplemento. Estas FDP asignadas recogen el conocimiento y la experiencia del metrologo que formula el modelo que, en última instancia, es el responsable de la calidad de los resultados finales.

6.1.7 Un texto de referencia sobre las distribuciones de probabilidad es el de Evans, Hastings y Peacock [18].

6.2 Teorema de Bayes

6.2.1 Supóngase que la información sobre una magnitud de entrada X está constituida por una serie de indicaciones consideradas como realizaciones de variables aleatorias independientes, distribuidas del mismo modo, que se caracterizan por una FDP especificada, pero cuya esperanza matemática y varianza son desconocidas. En tal caso, puede utilizarse el teorema de Bayes para calcular una FDP para X , donde X se considera igual a la media desconocida de estas variables aleatorias. El cálculo se desarrolla en dos pasos. En primer lugar, se asigna una FDP previa

(anterior a los datos), no informativa y conjunta, a la esperanza matemática y a la varianza desconocidas. Aplicando el teorema de Bayes, esta FDP previa y conjunta se actualiza, a partir de la información proporcionada por la serie de indicaciones, para obtener una FDP conjunta posterior (posterior a los datos) para los dos parámetros desconocidos. La FDP posterior esperada para la media desconocida, se calcula como una FDP marginal, mediante la integración de los valores posibles de la varianza desconocida (véase el apartado 6.4.9.2).

6.2.2 Con el uso del teorema de Bayes, la actualización se lleva a cabo mediante el producto de una función de probabilidad por la FDP anterior [20]. La función de probabilidad, en el caso de indicaciones obtenidas de forma independiente, es el producto de funciones idénticas en la forma, por ejemplo, FDP gaussianas, una para cada indicación. La FDP posterior se determina mediante la integración del producto de la FDP previa por la probabilidad, para todos los valores posibles de la varianza, y normalizando la expresión resultante.

NOTA 1 En algunos casos (como por ejemplo en el apartado 6.4.11), las variables aleatorias, cuyas indicaciones se consideran resultados, se caracterizan por una FDP de un solo parámetro. En tales casos, se asigna una FDP previa, sin información, a la esperanza matemática desconocida de las variables aleatorias, y la distribución posterior de X viene dada directamente por el teorema de Bayes, sin necesidad de FDP marginales.

NOTA 2 El teorema de Bayes también puede aplicarse en otras circunstancias, por ejemplo, cuando la esperanza matemática y la desviación típica son desconocidas y se suponen iguales.

6.3 El principio de máxima entropía

6.3.1 Cuando se utiliza el principio de máxima entropía introducido por Jaynes [25], se selecciona una FDP única entre todas las posibles FDP con propiedades específicas, por ejemplo, momentos centrales específicos de distintos órdenes o intervalos específicos para los que la FDP no es cero. Este método es particularmente útil para asignar las FDP a magnitudes para las que no existe una serie de indicaciones o que no se han medido de forma explícita.

6.3.2 En la aplicación del principio de máxima entropía, para obtener una FDP $g_x(\xi)$ que represente de manera adecuada el conocimiento incompleto de una magnitud X de acuerdo con la información disponible, se define la función "entropía de la información" como:

$$S[g] = - \int g_x(\xi) \ln g_x(\xi) d\xi .$$

Esta función, introducida por Shannon [48], se maximiza considerando las restricciones impuestas por la información de que se dispone.

6.4 Asignación de la función de densidad de probabilidad en algunas circunstancias habituales

6.4.1 Generalidades

Los apartados de 6.4.2 a 6.4.11 muestran asignaciones de FDP a magnitudes basadas en diversos tipos de información relativos a dichas magnitudes. Para cada FDP $g_x(\xi)$ se dan:

a) las fórmulas para la esperanza matemática y la varianza de X ,

b) la forma en que puede llevarse a cabo el muestreo de $g_x(\xi)$.

La Tabla 1 facilita el empleo de estos apartados e ilustra las FDP correspondientes.

NOTA Estas ilustraciones de las FDP no están dibujadas a escala. La FDP gaussiana multivariante no está representada.

6.4.2 La distribución rectangular

6.4.2.1 Si la única información disponible en relación con una magnitud X es un límite inferior a y un límite superior b , con $a < b$, entonces, de acuerdo con el principio de máxima entropía, se asignaría a X una distribución rectangular $R(a, b)$ en el intervalo $[a, b]$.

6.4.2.2 La FDP para X es:

$$g_x(\xi) = \begin{cases} 1/(b-a), & a \leq \xi \leq b, \\ 0, & \text{en el resto de puntos} \end{cases}$$

6.4.2.3 La esperanza matemática y la varianza de X son:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (2)$$

6.4.2.4 Para muestrear $R(a, b)$, obténgase un valor aleatorio r a partir de la distribución rectangular $R(0, 1)$ (véase C.3.3) y fórmese:

$$\xi = a + (b-a)r$$

6.4.3 La distribución rectangular con límites inexactos


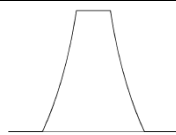
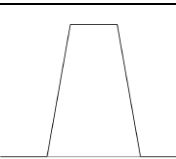
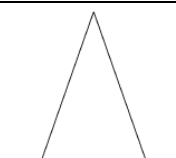
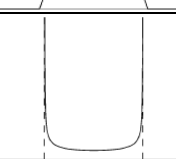
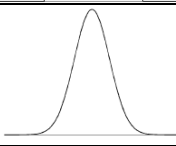
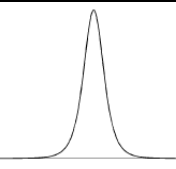
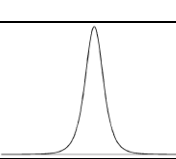
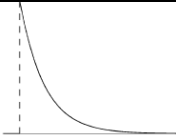
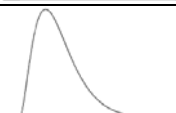
6.4.3.1 Sea una magnitud X definida entre los límites A y B con $A < B$, donde el punto medio $(A+B)/2$ del intervalo definido por estos límites es fijo pero la amplitud $B-A$ del intervalo no se conoce con exactitud. El valor de A se encuentra dentro del intervalo $a \pm d$, y B dentro de $b \pm d$, siendo $d > 0$ y $a+d < b-d$. Si no se dispone de más información sobre X , A y B , puede aplicarse el principio de máxima entropía para asignar a X una distribución rectangular con límites inexactos ("trapezoide curvilíneo").

6.4.3.2 La FDP para X es:

$$g_x(\xi) = \frac{1}{4d} \begin{cases} \ln[(\omega+d)/(x-\xi)], & a-d \leq \xi \leq a+d, \\ \ln[(\omega+d)/(\omega-d)], & a+d \leq \xi \leq b-d, \\ \ln[(\omega+d)/(\xi-x)], & b-d \leq \xi \leq b+d, \\ 0, & \text{en el resto de puntos,} \end{cases} \quad (3)$$

donde $x = (a+b)/2$ y $\omega = (b-a)/2$ son, respectivamente, el punto medio y la semiamplitud del intervalo $[a, b]$ [GUM: 1995, 4.3.9 nota 2]. Esta FDP es trapezoidal, pero tiene bordes que no son líneas rectas.

Tabla 1 – FDP asignadas en función de la información disponible (6.4.1, C.1.2)

Información disponible	FDP asignada e ilustración (no a escala)	Apartado
Límites inferior y superior a, b	Rectangular: $R(a, b)$ 	6.4.2
Límites inferior y superior inexactos $a \pm d, b \pm d$	Trapezoide curvilíneo: $C\text{Trap}(a, b, d)$ 	6.4.3
Suma de distribuciones rectangulares con límites inferiores y superiores a_1, b_1 y a_2, b_2 , asignadas a dos magnitudes	Trapezoidal: $\text{Trap}(a, b, \beta)$ con $a = a_1 + a_2,$ $b = b_1 + b_2,$ $\beta = (b_1 - a_1) - (b_2 - a_2) / (b - a)$ 	6.4.4
Suma de distribuciones rectangulares con límites inferiores y superiores a_1, b_1 y a_2, b_2 y la misma semiamplitud ($b_1 - a_1 = b_2 - a_2$), asignadas a dos magnitudes	Triangular: $T(a, b)$ con $a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2$ 	6.4.5
Comportamiento sinusoidal entre los límites inferior y superior a, b	Arco seno (en forma de U): $U(a, b)$ 	6.4.6
Mejor estimación x con incertidumbre típica asociada $u(x)$	Gaussiana: $N(x, u^2(x))$ 	6.4.7
Mejor estimación \mathbf{x} de una magnitud vectorial y matriz de incertidumbres asociadas \mathbf{U}_x	Gaussiana multivariante: $N(\mathbf{x}, \mathbf{U}_x)$	6.4.8
Serie de indicaciones x_1, \dots, x_n obtenidas independientemente a partir de una magnitud con distribución gaussiana, con esperanza matemática y varianza desconocidas	Distribución t : $t_{n-1}(\bar{x}, s^2/n)$ con $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i/n,$ $s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2/(n-1)$ 	6.4.9.2
Mejor estimación x , con incertidumbre expandida U_p , factor de cobertura k_p y grados efectivos de libertad ν_{ef}	Distribución t : $t_{\nu_{\text{ef}}}(x, (U_p/k_p)^2)$ 	6.4.9.7
Mejor estimación x de magnitudes no negativas	Exponencial: $\text{Ex}(1/x)$ 	6.4.10
Número q de objetos contados	Gamma: $G(q+1, 1)$ 	6.4.11

NOTA La ecuación (3) puede expresarse para aplicaciones informáticas como:

$$g_x(\xi) = \frac{1}{4d} \max\left(\ln \frac{\omega + d}{\max(|\xi - x|, \omega - d)}, 0\right)$$

6.4.3.3 La esperanza matemática y la varianza de X son:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} + \frac{d^2}{9}. \quad (4)$$

NOTA 1 La varianza de la ecuación (4) siempre es mayor que la varianza para los límites exactos de la ecuación (2), es decir, para $d = 0$.

NOTA 2 La GUM trata la información sobre X en el apartado 6.4.3.1, asignando grados de libertad a la incertidumbre típica asociada a la mejor estimación de X [GUM: 1995, G.4.2].

6.4.3.4 Para muestrear $\text{CTrap}(a, b, d)$, obténganse dos valores aleatorios r_1 y r_2 independientes, a partir de la distribución rectangular $R(0, 1)$ (véase el anexo C.3.3) y fórmense:

$$a_s = (a - d) + 2dr_1, \quad b_s = (a + b) - a_s,$$

y

$$\xi = a_s + (b_s - a_s)r_2$$

NOTA El valor a_s se obtiene de la distribución rectangular con límites $a \pm d$. El valor b_s se forma de tal manera que el punto medio de a_s y b_s sea el valor preestablecido $x = (a + b) / 2$.

EJEMPLO En un certificado se establece que una tensión X se encuentra en el intervalo de $10,0 \text{ V} \pm 0,1 \text{ V}$. No se dispone de información adicional sobre X , excepto que se cree que los valores de los extremos del intervalo son el resultado del redondeo correcto de algún valor numérico (véase el apartado 3.20). Sobre esta base, ese valor numérico se encuentra entre $0,05 \text{ V}$ y $0,15 \text{ V}$, ya que el valor numérico de cada punto en el intervalo $(0,05, 0,15)$ redondeado a una cifra decimal significativa es $0,1$. La posición del intervalo puede, por lo tanto, considerarse fija, mientras que su amplitud es inexacta. La mejor estimación de X es $x = 10,0 \text{ V}$ y, utilizando la ecuación (4) con $a = 9,9 \text{ V}$, $b = 10,1 \text{ V}$ y $d = 0,05 \text{ V}$, la incertidumbre típica asociada $u(x)$ es:

$$u^2(x) = \frac{(0,2)^2}{12} + \frac{(0,05)^2}{9} = 0,0036.$$

Por lo tanto, $u(x) = (0,0036)^{1/2} = 0,060 \text{ V}$, que puede compararse con $0,2/\sqrt{12} = 0,058 \text{ V}$ para el caso de límites, son exactos. Se obtiene reemplazando d por cero. El uso de límites exactos en este caso, proporciona un valor numérico de $u(x)$ un 4% menor que con límites inexactos. La relevancia de tal diferencia debe considerarse dentro del contexto de la aplicación.

6.4.4 La distribución trapezoidal

6.4.4.1 En la GUM [GUM: 1995, 4.3.9] se describe la asignación de una distribución trapezoidal simétrica a una magnitud. Suponiendo que una magnitud X se define como la suma de dos magnitudes independientes X_1 y X_2 y que para $i = 1$ e $i = 2$, se asigna a las X_i una distribución rectangular $R(a_i, b_i)$ con límite inferior a_i y límite superior b_i ; entonces, la distribución de X es trapezoidal simétrica $\text{Trap}(a, b, \beta)$ con un límite inferior a , un límite superior b y un parámetro β igual a la relación entre la semiamplitud de la parte superior del trapecio y la de la base. Los

parámetros de esta distribución trapezoidal están relacionados con los de las distribuciones rectangulares mediante:

$$a = a_1 + a_2, \quad b = b_1 + b_2, \quad \beta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad (5)$$

donde

$$\lambda_1 = \frac{|(b_1 - a_1) - (b_2 - a_2)|}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{b - a}{2} \quad (6)$$

y

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2.$$

6.4.4.2 La FDP para X (Figura 5), obtenida mediante convolución [42, p93], es:

$$g_x(\xi) = \begin{cases} (\xi - x + \lambda_2)/(\lambda_2^2 - \lambda_1^2), & x - \lambda_2 \leq \xi \leq x - \lambda_1, \\ 1/(\lambda_1 + \lambda_2), & x - \lambda_1 \leq \xi \leq x + \lambda_1, \\ (x + \lambda_2 - \xi)/(\lambda_2^2 - \lambda_1^2), & x + \lambda_1 \leq \xi \leq x + \lambda_2, \\ 0, & \text{en el resto de puntos,} \end{cases} \quad (7)$$

donde $x = (a + b) / 2$.

NOTA La ecuación (7) puede expresarse como:

$$g_x(\xi) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \min\left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \max(\lambda_2 - |\xi - x|, 0), 1\right)$$

para su uso en aplicaciones informáticas.

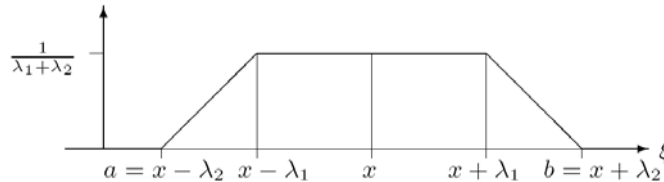


Figura 5 - FDP trapezoidal para $X = X_1 + X_2$, donde las FDP para X_1 y X_2 son rectangulares (6.4.4.2)

6.4.4.3 La esperanza matemática y la varianza de X son:

$$E(X) = \frac{a + b}{2}, \quad V(X) = \frac{(b - a)^2}{24} (1 + \beta^2).$$

6.4.4.4 Para muestrear $\text{Trap}(a, b, \beta)$ obténganse dos valores r_1 y r_2 independientes, a partir de la distribución rectangular típica $R(0, 1)$ (véase el anexo C.3.3) y fórmese:

$$\xi = a + \frac{b - a}{2} [(1 + \beta)r_1 + (1 - \beta)r_2].$$

6.4.5 La distribución triangular

6.4.5.1 Supóngase que una magnitud X se define como la suma de dos magnitudes independientes, a las que se les asigna una distribución rectangular (véase el apartado 6.4.4) con la misma semiamplitud, es decir, $b_1 - a_1 = b_2 - a_2$. De las ecuaciones (5) y (6) se deduce que $\lambda_1 = 0$ y $\beta = 0$. La distribución de X es la distribución trapezoidal $\text{Trap}(a, b, 0)$, que se reduce a la distribución triangular (simétrica) $T(a, b)$ en el intervalo $[a, b]$.

6.4.5.2 La FDP para X es:

$$g_x(\xi) = \begin{cases} (\xi - a)/\omega^2, & a \leq \xi \leq x \\ (b - \xi)/\omega^2, & x \leq \xi \leq b, \\ 0, & \text{en el resto de puntos} \end{cases} \quad (8)$$

donde $x = (a + b) / 2$ y $\omega = \lambda_2 = (b - a) / 2$.

NOTA La ecuación (8) puede expresarse como:

$$g_x(\xi) = \frac{2}{b-a} \max\left(1 - \frac{2|\xi - x|}{b-a}, 0\right)$$

para su uso en aplicaciones informáticas.

6.4.5.3 La esperanza matemática y la varianza de X son:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{24}.$$

6.4.5.4 Para muestrear $T(a, b)$ obténganse dos valores r_1 y r_2 independientes, a partir de la distribución rectangular típica de $R(0, 1)$ (véase el anexo C.3.3) y fórmese:

$$\xi = a + \frac{b-a}{2}(r_1 + r_2)$$

6.4.6 La distribución arco seno (en forma de U)

6.4.6.1 Si se sabe que una magnitud X tiene un ciclo sinusoidal, con fase desconocida Φ , entre los límites a y b especificados, con $a < b$, entonces, de acuerdo con el principio de máxima entropía, se le asignaría a Φ una distribución rectangular $R(0, 2\pi)$. La distribución asignada a X es la distribución arco seno $U(a, b)$ [18] dada por la transformación:

$$X = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \text{sen}\Phi,$$

donde Φ sigue una distribución rectangular $R(0, 2\pi)$.

6.4.6.2 La FDP para X es:

$$g_x(\xi) = \begin{cases} (2/\pi) \left[(b-a)^2 - (2\xi - a - b)^2 \right]^{-1/2}, & a < \xi < b, \\ 0, & \text{en el resto de puntos.} \end{cases}$$

Suplemento 1 de la GUM, traducción al español 2010

NOTA $U(a, b)$ está relacionada con la distribución arco seno típica $U(0, 1)$ dada por:

$$g_Z(z) = \begin{cases} \frac{[z(1-z)]^{-1/2}}{\pi}, & 0 < z < 1, \\ 0, & \text{en el resto de puntos,} \end{cases} \quad (9)$$

para la variable Z , a través de la transformación lineal:

$$X = a + (b - a) Z.$$

La esperanza matemática y la varianza de Z son $1/2$ y $1/8$ respectivamente. La distribución (9) se denomina arco seno, ya que la función de distribución correspondiente es:

$$G_Z(z) = \frac{1}{\pi} \arcsen(2z - 1) + \frac{1}{2}.$$

Es un caso particular de la distribución "beta" donde ambos parámetros son iguales a $1/2$.

6.4.6.3 La esperanza matemática y la varianza de X son:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{8}.$$

6.4.6.4 Para muestrear $U(a, b)$ obténgase un valor r a partir de la distribución rectangular típica $R(0, 1)$ (véase el anexo C.3.3) y fórmese:

$$\xi = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \text{sen } 2\pi r.$$

6.4.7 La distribución gaussiana

6.4.7.1 Si la única información disponible sobre una magnitud X es la mejor estimación x con incertidumbre típica asociada $u(x)$, de acuerdo con el principio de máxima entropía se asignaría a X una distribución de probabilidad gaussiana $N(x, u^2(x))$.

6.4.7.2 La FDP para X es:

$$g_X(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} u(x)} \exp\left(-\frac{(\xi - x)^2}{2u^2(x)}\right). \quad (10)$$

6.4.7.3 La esperanza matemática y la varianza de X son:

$$E(X) = x, \quad V(X) = u^2(x).$$

6.4.7.4 Para muestrear $N(x, u^2(x))$ obténgase un valor z a partir de la distribución gaussiana $N(0, 1)$ (véase el anexo C.4) y fórmese:

$$\xi = x + u(x)z.$$

6.4.8 La distribución gaussiana multivariante

6.4.8.1 Un resultado comparable al del apartado 6.4.7.1 puede obtenerse para una magnitud $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)^T$ N -dimensional. Si la única información disponible es la mejor estimación $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)^T$ de \mathbf{X} y la matriz de incertidumbre asociada estrictamente positiva es:

$$\mathbf{U}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} u^2(x_1) & u(x_1, x_2) & \dots & u(x_1, x_N) \\ u(x_2, x_1) & u^2(x_2) & \dots & u(x_2, x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(x_N, x_1) & u(x_N, x_2) & \dots & u^2(x_N) \end{bmatrix}$$

se asignaría una distribución gaussiana multivariante $N(\mathbf{x}, \mathbf{U}_{\mathbf{x}})$ a \mathbf{X} .

6.4.8.2 La FDP conjunta para \mathbf{X} es:

$$g_{\mathbf{X}}(\xi) = \frac{1}{[(2\pi)^N \det \mathbf{U}_{\mathbf{x}}]^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\xi - \mathbf{x})^T \mathbf{U}_{\mathbf{x}}^{-1}(\xi - \mathbf{x})\right). \quad (11)$$

6.4.8.3 La esperanza matemática y la matriz de covarianza de \mathbf{X} son:

$$E(\mathbf{X}) = \mathbf{x}, \quad V(\mathbf{X}) = \mathbf{U}_{\mathbf{x}}.$$

6.4.8.4 Para muestrear $N(\mathbf{x}, \mathbf{U}_{\mathbf{x}})$, obténganse N valores independientes $z_i, i = 1, \dots, N$, a partir de la distribución típica gaussiana $N(0, 1)$ (véase el anexo C.4) y fórmese:

$$\xi = \mathbf{x} + \mathbf{R}^T \mathbf{z},$$

donde $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N)^T$ y \mathbf{R} es la matriz triangular superior dada por la descomposición de Cholesky $\mathbf{U}_{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$ (véase el anexo C.5).

NOTA 1 En lugar de la descomposición de Cholesky $\mathbf{U}_{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$, puede utilizarse cualquier factorización matricial de esta forma.

NOTA 2 Las únicas FDP conjuntas consideradas de forma explícita en este Suplemento son las distribuciones gaussianas multivariantes, de uso habitual en la práctica. Un procedimiento numérico para el muestreo de una FDP gaussiana multivariante se ha dado anteriormente (también en el anexo C.5). Si va a utilizarse otra FDP multivariante, sería necesario facilitar un método para el muestreo.

Nota 3 La FDP gaussiana multivariante (11) se reduce al producto de N FDP gaussianas univariantes cuando no hay efectos de covarianza. En ese caso,

$$\mathbf{U}_{\mathbf{x}} = \text{diag}(u^2(x_1), \dots, u^2(x_N)),$$

donde

$$g_{\mathbf{x}}(\xi) = \prod_{i=1}^N g_{x_i}(\xi_i),$$

con

$$g_{x_i}(\xi_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} u(x_i)} \exp\left(-\frac{(\xi_i - x_i)^2}{2u^2(x_i)}\right).$$

6.4.9 La distribución t

6.4.9.1 La distribución t suele presentarse en dos circunstancias: en la evaluación de una serie de indicaciones (véase el apartado 6.4.9.2) y en la interpretación de los certificados de calibración (véase el apartado 6.4.9.7).

6.4.9.2 Supóngase que se dispone de una serie de n indicaciones x_1, \dots, x_n , obtenidas de forma independiente a partir de una magnitud con distribución gaussiana $N(\mu_0, \sigma_0^2)$, con esperanza matemática μ_0 y varianza σ_0^2 desconocidas. La magnitud de entrada deseada X se toma igual a μ_0 . Entonces, asignando una distribución previa, conjunta y no informativa a μ_0 y σ_0^2 , y utilizando el teorema de Bayes, resulta que la FDP marginal de X es una distribución $t = t_\nu(\bar{x}, s^2/n)$, con $\nu = n - 1$ grados de libertad, donde:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

son, respectivamente, la media y la varianza de las indicaciones [20].

6.4.9.3 La FDP para X es:

$$g_x(\xi) = \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)\sqrt{(n-1)\pi}} \times \frac{1}{s/\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{n-1} \left(\frac{\xi - \bar{x}}{s/\sqrt{n}} \right)^2 \right)^{-n/2}, \quad (12)$$

donde

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z > 0,$$

es la función gamma.

6.4.9.4 La esperanza matemática y la varianza de X son:

$$E(X) = \bar{x}, \quad V(X) = \frac{n-1}{n-3} \frac{s^2}{n},$$

donde $E(X)$ se define sólo para $n > 2$ y $V(X)$ sólo para $n > 3$. Para $n > 3$, las mejores estimaciones para X y su incertidumbre típica asociada son:

$$x = \bar{x}, \quad u(x) = \sqrt{\frac{n-1}{n-3}} \frac{s}{\sqrt{n}}. \quad (13)$$

NOTA 1 En la GUM [GUM: 1995, 4.2], la incertidumbre típica $u(x)$ asociada a la media de una serie de indicaciones n obtenidas de forma independiente se evalúa como $u(x) = s/\sqrt{n}$, en lugar de utilizar la ecuación (13) y los grados de libertad asociados $\nu = n - 1$ se consideran como una medida de la fiabilidad de $u(x)$. Por extensión, los grados de libertad se asocian a una incertidumbre obtenida mediante una evaluación Tipo B, basándose en el criterio subjetivo de la fiabilidad de la evaluación [GUM: 1995, G.4.2] (cf. 6.4.3.3 nota 2). Los grados de libertad asociados a la incertidumbre $u(x_i)$ son necesarios para obtener, mediante la aplicación de la fórmula de Welch-Satterthwaite, los grados efectivos de libertad ν_{ef} asociados a la incertidumbre $u(y)$.

NOTA 2 En el contexto bayesiano de este Suplemento, conceptos tales como la fiabilidad o la incertidumbre de una incertidumbre no son necesarios. En consecuencia, los grados de libertad en una evaluación Tipo A de la incertidumbre ya no se consideran como una medida de la fiabilidad y los grados de libertad en una evaluación Tipo B no existen.

6.4.9.5 Para muestrear $t_\nu(\bar{x}, s^2/n)$, obténgase un valor de t a partir de la distribución centrada t_ν , con $\nu = n - 1$ grados de libertad [GUM: 1995, G.3] (véase también el anexo C.6) y fórmese:

$$\xi = \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t.$$

6.4.9.6 Si en lugar de una desviación típica s , calculada a partir de una única serie de indicaciones, se utiliza una desviación típica s_p con ν_p grados de libertad obtenida a partir de un conjunto de datos Q , deben emplearse:

$$s_p^2 = \frac{1}{\nu_p} \sum_{j=1}^Q \nu_j s_j^2, \quad \nu_p = \sum_{j=1}^Q \nu_j,$$

y los grados de libertad $\nu = n - 1$ de la función t asignada a X deberán ser reemplazados por los grados de libertad ν_p asociados a la desviación típica s_p . Como consecuencia, la ecuación (12) deberá sustituirse por:

$$g_x(\xi) = \frac{\Gamma((\nu_p + 1)/2)}{\Gamma(\nu_p/2) \sqrt{\nu_p \pi}} \times \frac{1}{s_p/\sqrt{n}} \left[1 + \frac{1}{\nu_p} \left(\frac{\xi - \bar{x}}{s_p/\sqrt{n}} \right)^2 \right]^{-(\nu_p + 1)/2}$$

y las expresiones (13) por:

$$x = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad u(x) = \sqrt{\frac{\nu_p}{\nu_p - 2}} \frac{s_p}{\sqrt{n}} \quad (\nu_p \geq 3).$$

6.4.9.7 Si la fuente de información acerca de una magnitud X es un certificado de calibración [GUM: 1995, 4.3.1] que establece su mejor estimación x , la incertidumbre expandida U_p , el factor de cobertura k_p y los grados efectivos de libertad ν_{ef} , entonces debe asignarse a X una distribución $t = t_\nu(x, (U_p/k_p)^2)$ con $\nu = \nu_{\text{ef}}$ grados de libertad.

6.4.9.8 Si ν_{ef} se considera infinito o no se especifica, en cuyo caso se tomaría como infinito en ausencia de otra información, se asignará a X una distribución gaussiana $N(x, (U_p/k_p)^2)$ (véase el apartado 6.4.7.1).

NOTA Esta distribución es el caso límite de la distribución $t = t_\nu(x, (U_p/k_p)^2)$, cuando ν tiende a infinito.

6.4.10 La distribución exponencial

6.4.10.1 Si la única información disponible con respecto a una magnitud no negativa X es su mejor estimación $x > 0$, entonces, de acuerdo con el principio de máxima entropía, se asignaría a X una distribución exponencial $\text{Ex}(1/x)$.

6.4.10.2 La FDP para X es:

$$g_x(\xi) = \begin{cases} \exp(-\xi/x)/x, & \xi \geq 0, \\ 0, & \text{en el resto de puntos.} \end{cases}$$

6.4.10.3 La esperanza matemática y la varianza de X son:

$$E(X) = x, \quad V(X) = x^2.$$

6.4.10.4 Para muestrear $Ex(1/x)$, obténgase un valor r a partir de la distribución rectangular $R(0,1)$ (véase el anexo C.3.3) y fórmese:

$$\xi = -x \ln r.$$

NOTA Para ampliar la información sobre la asignación de FDP a magnitudes no negativas se puede consultar [14].

6.4.11 La distribución Gamma

6.4.11.1 Suponiendo que la magnitud X es el número medio de elementos existentes en una muestra de un tamaño fijo (por ejemplo, el número medio de partículas en una muestra de aire tomada de una sala limpia, o el número medio de fotones emitidos por una fuente en un intervalo de tiempo dado), que q es el número de elementos contados en una muestra de un tamaño específico y que este número es una magnitud con esperanza matemática desconocida que sigue una distribución de Poisson, entonces, de acuerdo con el teorema de Bayes, después de asignar una distribución previa constante a la esperanza matemática, se asignaría a X una distribución gamma $G(q+1,1)$.

6.4.11.2 La FDP para X es:

$$g_x(\xi) = \begin{cases} \xi^q \exp(-\xi)/q!, & \xi \geq 0, \\ 0, & \text{para el resto de los puntos.} \end{cases} \quad (14)$$

6.4.11.3 La esperanza matemática y la varianza de X son:

$$E(X) = q + 1 \quad V(X) = q + 1 \quad (15)$$

6.4.11.4 Para muestrear $G(q + 1, 1)$, obténganse $q + 1$ valores independientes de r_i , con $i = 1, \dots, q + 1$, a partir de la distribución rectangular típica $R(0,1)$ (véase el anexo C.3.3) y fórmese:

$$\xi = -\ln \prod_{i=1}^{q+1} r_i.$$

NOTA 1 Si el recuento se realiza a través de varias muestras (según la distribución de Poisson) y la q_i es el número de los elementos contados en la i -ésima muestra, de tamaño S_i , entonces la distribución para el número medio de elementos en una muestra de tamaño $S = \sum_i S_i$ es $G(\alpha, \beta)$ con $\alpha = 1 + \sum_i q_i$ y $\beta = 1$. Las expresiones (14) y (15) se utilizan con $q = \sum_i q_i$.

NOTA 2 La distribución gamma es una generalización de la distribución chi-cuadrado y se utiliza para representar la información asociada a las varianzas.

NOTA 3 La distribución gamma específica del apartado 6.4.11.4 es una distribución de Erlang obtenida mediante la suma de $q + 1$ distribuciones exponenciales con parámetro 1 [18].

6.5 Distribuciones de probabilidad a partir de estimaciones previas de incertidumbre

Una estimación previa de incertidumbre puede haber proporcionado una distribución de probabilidad para una magnitud de salida que será una magnitud de entrada en una evaluación posterior de incertidumbre. Esta distribución de probabilidad puede ser reconocible, por ejemplo como una FDP gaussiana. Puede estar disponible, por ejemplo como una aproximación a la función de distribución de una magnitud, obtenida de una aplicación previa del MMC. El método para describir esta función de distribución para una magnitud dada se describe en el apartado 7.5.1 y en el anexo D.2.

7 Aplicación del método de Monte Carlo

7.1 Generalidades

Este apartado proporciona información acerca del empleo del método de Monte Carlo en la propagación de distribuciones, véase el procedimiento del apartado 5.9.6, representado esquemáticamente en la Figura 4.

7.2 Número de reiteraciones en el método de Monte Carlo

7.2.1 Debe seleccionarse un valor para el número M de reiteraciones a realizar con el MMC; es decir, el número de evaluaciones del modelo. Éste puede elegirse a priori, en cuyo caso no habrá un control directo de la calidad de los resultados numéricos proporcionados por el MMC. El motivo es que el número de reiteraciones necesarias para obtener unos resultados dentro de una tolerancia numérica previamente establecida dependerá de la “forma” de la FDP para la magnitud de salida y de la probabilidad de cobertura requerida. Además, los cálculos son de naturaleza estocástica, estando basados en un muestreo aleatorio.

NOTA Un valor de $M = 10^6$ suele proporcionar un intervalo de cobertura del 95 % para la magnitud de salida, de forma que la amplitud del intervalo es correcta con una o dos cifras decimales significativas.

7.2.2 Debe elegirse un valor de M grande comparado con $1 / (1 - p)$, p. ej., M al menos 10^4 veces mayor que $1 / (1 - p)$. Así podrá esperarse que G proporcione una representación discreta y razonable de $G_Y(\eta)$ en las regiones cercanas a los límites de un intervalo de cobertura del $100p$ % de Y .

7.2.3 Ya que no hay garantía de que este o cualquier otro número específico asignado previamente sea suficiente, puede utilizarse un procedimiento que seleccione M de forma automática, a medida que las reiteraciones vayan sucediéndose (puede encontrarse más información en la referencia [2]). El apartado 7.9 describe dicho procedimiento, una de cuyas características es que el número de reiteraciones tomado resulta equilibrado respecto a la posibilidad de alcanzar la tolerancia numérica requerida.

NOTA Si el modelo es complejo, por ejemplo si implica la resolución de un modelo de elementos finitos, debido al largo tiempo de procesamiento, puede que no sea posible utilizar un número M suficientemente grande para lograr un conocimiento adecuado de la distribución de la magnitud de salida. En este caso una aproximación sería considerar $g_Y(\eta)$ gaussiana (como en la GUM) y proceder como sigue: utilizar, por ejemplo, un número relativamente pequeño para M , 50 ó 100. La media y la desviación típica de los valores de Y resultantes de los M valores del modelo podrían tomarse como y y $u(y)$ respectivamente. A partir de esta información, podría asignarse una FDP gaussiana $g_Y(\eta) = N(y, u^2(y))$ para caracterizar el conocimiento de Y (véase el apartado 6.4.7) y calcular el intervalo de cobertura deseado para Y . Aunque el uso de un valor pequeño de M es inevitablemente menos fiable que el uso de uno grande, ya que no proporciona una aproximación a la FDP de Y , sin embargo, tiene en cuenta las no linealidades del modelo.

7.3 Muestreo a partir de distribuciones de probabilidad

En una aplicación del MMC, se obtienen M vectores \mathbf{x}_r , $r = 1, \dots, M$ (véase el apartado 7.2) a partir de las FDP $g_{X_i}(\xi_i)$ para las N magnitudes de entrada X_i . Si se considera adecuado pueden obtenerse de la FDP conjunta multivariante $g_{\mathbf{X}}(\xi)$. En el anexo C se incluyen recomendaciones relativas a la forma de llevar a cabo este muestreo para las distribuciones más comunes: rectangular, gaussiana, t y gaussiana multivariante, también puede consultarse el apartado 6.4. Se pueden obtener dichos vectores aleatoriamente a partir de cualquier otra distribución, véase el anexo C.2. Algunas de esas distribuciones pueden ser aproximaciones a distribuciones basadas en resultados de Monte Carlo en un cálculo de incertidumbres previo (véanse los apartados 6.5, 7.5 y el anexo D).

NOTA Para que los resultados del MMC sean válidos estadísticamente, es necesario que los generadores de números pseudoaleatorios usados para obtener las distribuciones requeridas tengan propiedades adecuadas. En el anexo C.3.2 se muestran algunos test para evaluar la aleatoriedad de los números producidos por un generador.

7.4 Evaluación del modelo

7.4.1 Se calculan los M valores del modelo a partir de las FDP de las N magnitudes de entrada. En concreto, los M valores serían $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M$, donde el r -ésimo valor \mathbf{x}_r comprende $x_{1,r}, \dots, x_{N,r}$, siendo $x_{i,r}$ un valor para X_i obtenido a partir de su FDP. Entonces, los valores para el modelo serán:

$$y_r = f(\mathbf{x}_r), r = 1, \dots, M$$

7.4.2 Si las X_i no son independientes, deben realizarse las modificaciones necesarias en el apartado 7.4.1 asignándoles una FDP conjunta.

NOTA El modelo y las evaluaciones que se derivan se realizan aplicando la ley de propagación de incertidumbres, usando derivadas exactas y las mejores estimaciones para las magnitudes de entrada. Las evaluaciones del modelo se realizan sólo cuando, aplicando la ley de propagación de incertidumbres se usan aproximaciones numéricas (diferencias finitas) a las derivadas. Estas evaluaciones se realizan, si se sigue la recomendación de la GUM [GUM: 1995, 5.1.3 nota 2], para las mejores estimaciones de las magnitudes de entrada y en puntos situados sucesivamente a \pm una incertidumbre típica de cada estimación, cada vez. Con el MMC, las evaluaciones del modelo se realizan en el entorno de estas mejores estimaciones, en puntos que pueden distar de ellos hasta varias desviaciones típicas. El hecho de que se realicen evaluaciones del modelo en distintos puntos, dependiendo de la aproximación utilizada, puede conllevar diversas cuestiones relacionadas con el procedimiento numérico utilizado, por ejemplo asegurar la convergencia (cuando se utilizan métodos iterativos) y la estabilidad numérica. El usuario debe asegurarse de que, cuando sea adecuado, los métodos numéricos empleados para evaluar f son válidos en una región suficientemente grande que contenga estas mejores estimaciones. En ocasiones este aspecto puede resultar crítico.

7.5 Representación discreta de la función de distribución para la magnitud de salida

7.5.1 Una representación discreta \mathbf{G} de la función de distribución $G_Y(\eta)$ para la magnitud de salida Y puede obtenerse como sigue:

- a) ordenar los valores y_r , $r = 1, \dots, M$, del modelo obtenidos mediante el MMC en orden no decreciente. Denominar los valores ordenados del modelo $y_{(r)}$, $r = 1, \dots, M$;
- b) si es necesario, introducir pequeñas perturbaciones numéricas en cualquiera de los valores duplicados del modelo $y_{(r)}$ de forma que el conjunto completo resultante de $y_{(r)}$, $r = 1, \dots, M$ forme una secuencia estrictamente creciente (véase la condición b) en el apartado 5.10.1);
- c) tomar \mathbf{G} como el conjunto $y_{(r)}$, $r = 1, \dots, M$.

NOTA 1 En el paso a) debe emplearse un algoritmo de ordenación con un número de operaciones proporcional a $M \ln M$. Un algoritmo simplista podría conllevar un tiempo de computación proporcional a M^2 , innecesariamente largo (véase el apartado 7.8).

NOTA 2 En el paso a) se emplea la expresión “no decreciente” en lugar de “creciente” debido a posibles coincidencias entre los valores y_r del modelo.

NOTA 3 Con respecto al paso b), la introducción únicamente de pequeñas perturbaciones asegura que se mantendrán las propiedades estadísticas de $y_{(r)}$.

NOTA 4 En el paso b), es sumamente improbable que sea necesario introducir perturbaciones debido a la gran cantidad de números distintos que pueden surgir de los valores del modelo generados a partir de las magnitudes de entrada obtenidas mediante los generadores de números aleatorios. De cualquier forma, la utilización de un software robusto proporcionaría predicciones apropiadas.

NOTA 5 En relación al paso c), de \mathbf{G} puede deducirse diversa información. En particular, información adicional sobre la esperanza matemática y la desviación típica, como medidas del sesgo y de la curtosis, y otros estadísticos como la moda y la mediana.

NOTA 6 Si Y se utiliza como magnitud de entrada en otro cálculo posterior de incertidumbres, el muestreo a partir de su distribución de probabilidad se puede llevar a cabo fácilmente extrayendo aleatoriamente valores de $y_{(r)}$, $r = 1, \dots, M$, con la misma probabilidad (véase el apartado 6.5.).

7.5.2 Cuando $y_{(r)}$ (o y_r) se representa en forma de histograma (con una anchura de intervalo adecuada) forma una distribución de frecuencias que, normalizada para tener un área unitaria, proporciona una aproximación a la FDP $g_Y(\eta)$ de Y . Generalmente los cálculos no se realizan a partir de este histograma, cuya resolución depende de la elección de la anchura del intervalo, sino basándose en \mathbf{G} . El histograma, no obstante, puede ser útil como ayuda para entender la naturaleza de la FDP, por ejemplo el alcance de su asimetría. Con respecto a la utilización de un valor numérico grande de M , véase el apartado 7.8.3 nota 1.

7.5.3 A veces puede ser útil una aproximación continua a $G_Y(\eta)$. El anexo D describe los métodos para obtener esta aproximación.

7.6 Estimación de la magnitud de salida y de su incertidumbre típica asociada

La media

$$\tilde{y} = \frac{1}{M} \sum_{r=1}^M y_r \quad (16)$$

y la desviación típica $u(\tilde{y})$ calculada como:

$$u^2(\tilde{y}) = \frac{1}{M-1} \sum_{r=1}^M (y_r - \tilde{y})^2 \quad (17)$$

se toman, respectivamente, como una estimación y de Y , y su incertidumbre típica $u(y)$ asociada a y .

NOTA 1 Debe emplearse la ecuación (17) en lugar de la fórmula matemática equivalente:

$$u^2(\tilde{y}) = \frac{M}{M-1} \left(\frac{1}{M} \sum_{r=1}^M y_r^2 - \tilde{y}^2 \right).$$

Debido a las múltiples ocasiones en que en metrología $u(y)$ es mucho más pequeña que $|y|$ (en cuyo caso las y_r tienen en común una serie de cifras decimales), algunos términos de la fórmula anterior se cancelan (una media de cuadrados menos una media al cuadrado). Este efecto puede ser tan fuerte que el valor numérico resultante podría tener pocas cifras decimales correctas como para que la evaluación de la incertidumbre fuese válida [4].

NOTA 2 En algunas circunstancias especiales, como cuando a una de las magnitudes de entrada se le ha asignado una FDP basada en una distribución t con menos de tres grados de libertad, la esperanza matemática y la desviación típica de Y , descritas mediante la FDP $g_Y(\eta)$, podrían no existir. Las ecuaciones (16) y (17) podrían ofrecer resultados no coherentes. Sin embargo, sí podría obtenerse un intervalo de cobertura para Y (véase el apartado 7.7), ya que G es coherente y puede determinarse.

NOTA 3 En general \tilde{y} no coincidirá con el modelo evaluado para las mejores estimaciones de las magnitudes de entrada ya que, para un modelo no lineal $f(\mathbf{X})$, $E(Y) = E(f(\mathbf{X})) \neq f(E(\mathbf{X}))$ (véase [GUM.1995 4.1.4]). Independientemente de si f es lineal o no lineal, en el límite, cuando M tiende a infinito, \tilde{y} se aproxima a $E(f(\mathbf{X}))$ cuando $E(f(\mathbf{X}))$ existe.

7.7 Intervalo de cobertura para una magnitud de salida

7.7.1 Un intervalo de cobertura para Y puede determinarse a partir de la representación discreta G de $G_Y(\eta)$ de forma similar a la expuesta en el apartado 5.3.2, $G_Y(\eta)$.

7.7.2 Sea $q = pM$, si pM es un entero. Si no es así, tómesese q como la parte entera de $pM + 1 / 2$. Entonces $[y_{\text{inf}}, y_{\text{sup}}]$ es un intervalo de cobertura del 100p % para Y donde, para cualquier $r = 1, \dots, M - q$, $y_{\text{inf}} = y_{(r)}$ y $y_{\text{sup}} = y_{(r+q)}$. El intervalo de cobertura con probabilidad simétrica del 100p % se calcula tomando $r = (M - q) / 2$, si $(M - q) / 2$ es un entero, o la parte entera de $(M - q + 1) / 2$ en caso contrario. El menor intervalo de cobertura del 100p % se obtiene tomando un r^* tal que, para $r = 1, \dots, M - q$, $y_{(r^*+q)} - y_{(r^*)} \leq y_{(r+q)} - y_{(r)}$.

NOTA Debido a la aleatoriedad del MMC, algunas de las amplitudes $M - q$ de estos intervalos serán más pequeñas que la media y otras más grandes. Por tanto, eligiendo la menor amplitud, (la aproximación a) el intervalo 100p % de confianza más pequeño tiende a ser marginalmente menor que el calculado a partir de $G_Y(\eta)$, con la consecuencia de que la probabilidad de cobertura típica es inferior a 100p %. Para valores grandes de M , esta probabilidad de cobertura es inferior al 100p % en una cantidad despreciable.

EJEMPLO Se extrajeron 10^5 números de un generador de números pseudoaleatorios para una distribución rectangular en el intervalo $[0, 1]$ y el menor intervalo de cobertura del 95 % se calculó según lo anterior. Este ejercicio se llevó a cabo 1000 veces. La probabilidad de cobertura media fue del 94,92 % y la desviación típica de las 1000 probabilidades de cobertura 0,06 %.

7.8 Tiempo de procesamiento

7.8.1 El tiempo de procesamiento del MMC depende fundamentalmente del requerido en los tres pasos siguientes:

- a) realizar M extracciones de la FDP de cada magnitud de entrada X_i (o de la FDP conjunta para \mathbf{X});
- b) realizar las correspondientes M evaluaciones del modelo;
- c) ordenar los M valores resultantes del modelo en orden no decreciente.

7.8.2 El tiempo necesario para la realización de cada uno de estos tres pasos es directamente proporcional a (a) M , (b) M y (c) $M \ln M$ (siempre que se emplee un algoritmo eficiente [47]).

7.8.3 Si el modelo es simple y las magnitudes de entrada independientes, es de esperar que domine el tiempo del paso c), y el tiempo total será, habitualmente, de unos pocos segundos para $M = 10^6$ en un ordenador personal trabajando a varios GHz. Si no es así, sea T_1 el tiempo necesario para realizar una extracción de las magnitudes de entrada a partir de sus FDP y T_2 el tiempo necesario para realizar una evaluación del modelo. Entonces, el tiempo total será esencialmente $M \times (T_1 + T_2)$ el cual, si el modelo es complicado, estará dominado por el término MT_2 .

NOTA 1 Si el modelo es simple y M muy grande, por ejemplo 10^8 ó 10^9 , el tiempo de ordenación puede ser excesivo en comparación con el tiempo necesario para realizar las M evaluaciones del modelo. En este caso, los cálculos pueden basarse entonces en una aproximación a $g_{\mathcal{Y}}(\eta)$ derivada de un histograma adecuado de la y_r .

NOTA 2 A partir del siguiente problema inventado, cuyo modelo consiste en la suma de cinco términos, se puede obtener una idea del tiempo de cálculo necesario para una aplicación del MMC:

$$Y = \cos X_1 + \sin X_2 + \tan^{-1} X_3 + \exp(X_4) + X_5^{1/3}$$

Asignando una distribución gaussiana a cada una de las magnitudes de entrada X_i y realizando $M = 10^6$ reiteraciones de Monte Carlo, los tiempos relativos de cálculo para (a) generar $5M$ números aleatorios gaussianos, (b) obtener M valores del modelo y (c) ordenar los M valores obtenidos para el modelo fueron respectivamente 20 %, 20 % y 60 %, con un tiempo total de cálculo de unos pocos segundos en un ordenador personal operando a varios GHz.

7.9 Procedimiento de Monte Carlo adaptable

7.9.1 Generalidades

Una puesta en práctica básica de un procedimiento de Monte Carlo adaptable supone consigo la realización de un número creciente de reiteraciones de Monte Carlo, hasta que los resultados de interés se hayan estabilizado en sentido estadístico. Se dice que un resultado numérico se ha estabilizado cuando el doble de su desviación típica asociada es inferior a la tolerancia numérica (véase el apartado 7.9.2) asociada a la desviación típica $u(y)$.

7.9.2 Tolerancia numérica asociada a un valor numérico

Sea n_{dig} el número de cifras decimales significativas consideradas como imprescindibles en un valor numérico z . La tolerancia numérica δ asociada a z se obtiene como sigue:

- a) expresando z en la forma $c \times 10^l$, donde c es un entero con n_{dig} cifras decimales significativas y l un entero;

b) tomando:

$$\delta = \frac{1}{2} 10^l. \quad (18)$$

EJEMPLO 1 La estimación de la magnitud de salida en la medición de un patrón de masa de valor nominal 100 g [GUM: 1995, 7.2.2] es $y = 100,021\,47$ g. La desviación típica $u(y) = 0,000\,35$ g, considerándose ambas cifras significativas como imprescindibles. Entonces $n_{\text{dig}} = 2$ y $u(y)$ puede expresarse como 35×10^{-5} g y, por tanto, $c = 35$ y $l = -5$. Tómese $\delta = \frac{1}{2} \times 10^{-5}$ g = 0,000 005 g.

EJEMPLO 2 Como el ejemplo 1, salvo que sólo se considera imprescindible una cifra decimal significativa en $u(y)$. Entonces $n_{\text{dig}} = 1$ y $u(y) = 0,000\,4$ g = 4×10^{-4} g, siendo $c = 4$ y $l = -4$. Por tanto $\delta = \frac{1}{2} \times 10^{-4}$ g = 0,000 05 g.

EJEMPLO 3 En una medición de temperatura, $u(y) = 2$ K. Entonces $n_{\text{dig}} = 1$ y $u(y) = 2 = 10^0$ K, siendo $c = 2$ y $l = 0$. Por tanto, $\delta = \frac{1}{2} \times 10^0$ K = 0,5 K.

7.9.3 Objetivo de un procedimiento adaptable

El objetivo del procedimiento adaptable presentado en el apartado 7.9.4 consiste en proporcionar:

- una estimación y de Y ,
- una incertidumbre típica asociada $u(y)$,
- los límites y_{inf} e y_{sup} de un intervalo de cobertura para Y correspondiente a la probabilidad de cobertura estipulada, de forma que cada uno de estos cuatro valores alcance la tolerancia numérica requerida.

NOTA 1 Por su naturaleza estocástica, el procedimiento no puede garantizar la obtención de dicho intervalo.

NOTA 2 Los valores de $u(y)$ e y generalmente “convergen” considerablemente más rápido que y_{inf} e y_{sup} con respecto al número de reiteraciones de Monte Carlo.

NOTA 3 Generalmente, cuanto más grande es la probabilidad de cobertura, mayor es el número de reiteraciones de Monte Carlo necesarias para determinar y_{inf} e y_{sup} para una tolerancia numérica dada.

7.9.4 Procedimiento adaptable

Una aproximación práctica, que conlleva la realización de una secuencia de aplicaciones del MMC, es la siguiente:

a) fijar n_{dig} a un valor adecuado, entero, positivo y pequeño (véase apartado 7.9.2);

b) fijar:

$$M = \text{máx}(J, 10^4),$$

donde J es el entero más pequeño, mayor o igual que $100 / (1 - p)$;

c) fijar $h = 1$, lo que indica la primera aplicación del MMC en la secuencia;

d) efectuar M reiteraciones de Monte Carlo, como en los apartados 7.3 y 7.4;

e) usar los M valores del modelo y_1, \dots, y_M así obtenidos para calcular, como en los apartados 7.5 a 7.7, respectivamente, $y^{(h)}$, $u(y^{(h)})$, $y_{\text{inf}}^{(h)}$ e $y_{\text{sup}}^{(h)}$; es decir, una estimación de Y , su incertidumbre típica asociada y los límites izquierdo y derecho de un intervalo de cobertura del $100p$ %, para el h -ésimo elemento de la secuencia;

f) si $h = 1$, incrementar h en una unidad y volver al paso d);

g) calcular la desviación típica s_y asociada a la media de las estimaciones $y^{(1)}, \dots, y^{(h)}$ de Y , como:

$$s_y^2 = \frac{1}{h(h-1)} \sum_{r=1}^h (y^{(r)} - y)^2$$

donde

$$y = \frac{1}{h} \sum_{r=1}^h y^{(r)};$$

h) calcular el homólogo de este estadístico para $u(y)$, y_{inf} e y_{sup} ;

i) emplear todos los $h \times M$ valores disponibles del modelo para obtener $u(y)$;

j) calcular la tolerancia numérica δ asociada a $u(y)$ como en el apartado 7.9.2;

k) si cualquiera de los valores $2s_y$, $2s_{u(y)}$, $2s_{y_{\text{inf}}}$ y $2s_{y_{\text{sup}}}$ supera a δ , incrementar h en una unidad y volver al paso d);

l) considerar el cálculo total como estabilizado y emplear todos los $h \times M$ valores obtenidos del modelo para calcular y , $u(y)$ y un intervalo de cobertura del $100p$ %, como en los apartados 7.5 a 7.7.

NOTA 1 Normalmente n_{dig} en el paso a) podría elegirse como 1 ó 2.

NOTA 2 La elección de M en el paso b) es arbitraria pero, en la práctica, se ha demostrado conveniente.

NOTA 3 En el paso g), y puede considerarse como la realización de una variable aleatoria con desviación típica s_y .

NOTA 4 Las desviaciones típicas obtenidas en los pasos g) y h) tienden a reducirse de forma proporcional a $h^{-1/2}$ (véase apartado 5.9.6 nota 2).

NOTA 5 En situaciones en las que no sea necesario un intervalo de cobertura, el test de estabilización del cálculo del paso k) puede basarse únicamente en $2s_y$ y $2s_{u(y)}$.

NOTA 6 El factor 2 utilizado en el paso k) está basado en la consideración de las medias como realizaciones de variables gaussianas, y corresponde a una probabilidad de cobertura de aproximadamente el 95 %.

NOTA 7 Una aproximación alternativa, no adaptable, para un intervalo de cobertura simétrico de un 95 % de probabilidad, que puede obtenerse utilizando los estadísticos de una distribución binomial [10], sería como sigue: seleccionar $M = 10^5$ ó $M = 10^6$. Formar el intervalo $[y_{(r)}, y_{(s)}]$ donde, para $M = 10^5$, $r = 2\,420$ y $s = 97\,581$, o para $M = 10^6$, $r = 24\,747$ y $s = 975\,254$. Este intervalo es un intervalo de cobertura estadístico del 95 %, para un nivel de confianza del 0,99 [GUM: 1995, C.2.30] [55]; es decir, la probabilidad de cobertura no será inferior al 95 % en al menos un 99 % de utilizaciones del MMC. La probabilidad de cobertura media de dicho intervalo será $(s - r)/(M + 1)$, superior al 95 % en una cantidad que va disminuyendo según M va aumentando; a saber,

un 95,16 % para $M = 10^5$ y un 95,05 % para $M = 10^6$. (Hay otras posibilidades para r y s , no tienen que sumarse a $M + 1$. Una condición suficiente [10, apartado 2.6] es que $s - r$ satisfaga:

$$\sum_{j=s-r}^M {}^M C_j p^j (1-p)^{M-j} < 1 - 0,99,$$

donde

$${}^M C_j = \frac{M!}{j!(M-j)!}$$

siendo el mejor resultado el que satisface dicha desigualdad). Estos resultados pueden ampliarse a otras probabilidades de cobertura (así como a otras elecciones de M).

8 Validación de los resultados

8.1 Validación del enfoque GUM mediante el método de Monte Carlo

8.1.1 El enfoque GUM funciona bien en muchas circunstancias. Sin embargo, no siempre es sencillo poder determinar si se cumplen todas las condiciones necesarias para su aplicación (véanse los apartados 5.7 y 5.8). En cualquier caso, el grado de dificultad de dicha determinación sería considerablemente mayor que el requerido para aplicar el método de Monte Carlo (MMC), suponiendo que se dispone de un software adecuado [8]. Así pues, ya que tales circunstancias no se pueden verificar fácilmente, deberá procederse a una validación en caso de duda. Dado que el campo de validez del MMC es mayor que el del enfoque GUM, se recomienda la aplicación de ambos métodos y la comparación de los resultados obtenidos. Si la comparación resulta favorable, podrá utilizarse el enfoque GUM tanto para el caso en cuestión, como para otros casos similares que se presenten en el futuro. En caso contrario, deberá darse prioridad al empleo del MMC u otra aproximación apropiada.

8.1.2 En concreto, es recomendable aplicar los dos pasos indicados a continuación y el procedimiento de comparación que sigue:

- aplicar el enfoque GUM (si es posible con la ley de propagación de la incertidumbre basada en una aproximación de Taylor de orden superior) (véase el apartado 5.6) con objeto de encontrar un intervalo de cobertura $y \pm U_p$ del 100 p % para la magnitud de salida, donde p es la probabilidad de cobertura estipulada;
- aplicar el método de Monte Carlo adaptable (véase el apartado 7.9.4) que proporcione (aproximaciones a) la incertidumbre típica $u(y)$ y los límites y_{inf} e y_{sup} del intervalo del 100 p % (simétrico o mínimo) requerido para la magnitud de salida. Véase también el apartado 8.2.

8.1.3 El procedimiento de comparación tiene el siguiente objetivo: determinar si los intervalos de cobertura obtenidos por el enfoque GUM y por el MMC coinciden dentro de una tolerancia numérica estipulada. Esta tolerancia se evalúa en términos de los límites de los intervalos de cobertura y corresponde a la obtenida al expresar la incertidumbre típica $u(y)$ mediante un número significativo de dígitos decimales (véase el apartado 7.9.2). El procedimiento se indica a continuación:

- obtener una tolerancia numérica δ asociada a $u(y)$, tal como se describe en el apartado 7.9.2;

- b) comparar los intervalos de cobertura obtenidos por el método GUM y por el MMC, para determinar si se ha obtenido el número requerido de dígitos decimales correctos en el intervalo proporcionado por el método GUM. En concreto, deben determinarse:

$$d_{\text{inf}} = |y - U_p - y_{\text{inf}}|, \quad (19)$$

$$d_{\text{sup}} = |y + U_p - y_{\text{sup}}|, \quad (20)$$

es decir, las diferencias absolutas de los respectivos límites de ambos intervalos. Entonces, si tanto d_{inf} como d_{sup} son inferiores a δ , la comparación es favorable y en este caso el enfoque GUM resulta validado.

NOTA La elección del intervalo de cobertura del 100*p* % influye sobre la comparación. Por ello, la validación es aplicable únicamente a la probabilidad de cobertura concreta *p*.

8.2 Obtención de resultados a partir del método de Monte Carlo, a efectos de validación

Para obtener resultados por el método de Monte Carlo, a efectos de la validación del apartado 8.1, debe realizarse un número *M* suficiente de reiteraciones (véase el apartado 7.2). Sea n_{dig} el número de dígitos decimales significativos requerido por $u(y)$ (véase el apartado 7.9.1) para validar el enfoque GUM utilizando el MMC. Sea δ la tolerancia numérica asociada a $u(y)$ (véase el apartado 7.9.2). Entonces, se recomienda utilizar el método de Monte Carlo adaptable (véase el apartado 7.9.4) para obtener resultados del MMC dentro de una tolerancia numérica $\delta / 5$. Tales resultados pueden obtenerse reemplazando δ por $\delta / 5$ en el paso k) del procedimiento.

NOTA La utilización de una tolerancia numérica $\delta / 5$ puede requerir un valor de *M* unas 25 veces mayor que el requerido para una tolerancia δ . Tal valor de *M* podría dar lugar a problemas de rendimiento en algunos ordenadores que operaran con matrices vectoriales de dimensión *M*. En tal caso, los cálculos podrían basarse en una aproximación a $g_Y(\eta)$ derivada de un histograma adecuado de y_r , en el que las celdas de frecuencias del histograma fueran actualizándose a medida que progresa el cálculo por Monte Carlo. Véase nota 1 del apartado 7.8.3.

9 Ejemplos

9.1 Ilustraciones de aspectos de este Suplemento

9.1.1 Los ejemplos dados ilustran varios aspectos de este Suplemento. Muestran la aplicación del enfoque GUM con y sin contribuciones derivadas de términos de orden superior en la aproximación de Taylor a la función modelo. También muestran los correspondientes resultados proporcionados por:

- el MMC, empleando un número *M* preasignado de reiteraciones,
- el método de Monte Carlo adaptable (véase el apartado 7.9.4), en el que *M* se determina automáticamente,
- ambos.

9.1.2 Algunos de los ejemplos muestran si los resultados del MMC proporcionados en el apartado 9.1.1 b) validan los obtenidos por el enfoque GUM. Una tolerancia numérica δ (véase el apartado 7.9.2) asociada a $u(y)$, con δ adecuadamente elegida, se utiliza para comparar el MMC con el enfoque GUM. Los resultados de Monte Carlo proporcionados en b) fueron obtenidos empleando una tolerancia numérica $\delta / 5$ (véase el apartado 8.2). En algunos casos se obtienen soluciones analíticas, para una comparación posterior.

9.1.3 Los resultados se presentan generalmente en la forma descrita en el apartado 5.5. Sin embargo, suelen darse más dígitos decimales significativos de los recomendados, uno o dos, a fin de facilitar la comparación de los resultados obtenidos mediante varias aproximaciones.

9.1.4 Para generar números pseudoaleatorios a partir de una distribución rectangular (véase el anexo C.3) se utilizó el generador Mersenne Twister [34], tras haber superado éste rigurosos ensayos aplicables precisamente a la generación de números pseudoaleatorios a partir de distribuciones rectangulares [30] (véase el anexo C.3.2). Dicho generador está disponible en MATLAB [36], el entorno de programación utilizado para obtener los resultados aquí mostrados.

9.1.5 El primer ejemplo (véase el apartado 9.2) constituye un modelo aditivo. Muestra cómo los resultados del MMC concuerdan con los de la GUM cuando se cumplen las condiciones de aplicación de esta última (como en el apartado 5.7). También se considera el mismo modelo, pero con diferentes FDP asignadas a las magnitudes de entrada, para mostrar algunas desviaciones cuando no todas las condiciones se cumplen.

9.1.6 El segundo ejemplo (véase el apartado 9.3) es un problema de calibración en metrología de masas. Muestra que el enfoque GUM es válido en este caso, sólo si se incluyen las contribuciones derivadas de términos de orden superior, en la aproximación de Taylor a la función modelo.

9.1.7 El tercer ejemplo (véase el apartado 9.4) se refiere a mediciones eléctricas. Muestra que la FDP de la magnitud de salida puede ser asimétrica y que el enfoque GUM puede proporcionar resultados no válidos, incluso si se consideran todos los términos de orden superior del desarrollo de Taylor. También trata casos en los que las magnitudes de entrada son independientes y dependientes.

9.1.8 El cuarto ejemplo (véase el apartado 9.5) es el incluido en la GUM sobre la calibración de bloques patrón [GUM: 1995 H.1]. La información ahí dada sobre el modelo de las magnitudes de entrada se interpreta asignando FDP adecuadas a dichas magnitudes, comparándose los resultados del enfoque GUM con los obtenidos por el MMC. Además, el tratamiento expuesto se aplica tanto al modelo original como a la aproximación realizada en la GUM.

9.2 Modelo aditivo

9.2.1 Formulación

Este ejemplo considera el modelo aditivo:

$$Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4, \quad (21)$$

un caso especial del modelo lineal genérico considerado en la GUM, para tres conjuntos diferentes de FDP, $g_{X_i}(\xi_i)$, asignados a las magnitudes de entrada X_i , supuestas independientes. La X_i y por tanto la magnitud de salida Y tienen dimensión 1. Para el primer conjunto, cada $g_{X_i}(\xi_i)$ es una FDP gaussiana típica (para la que X_i tiene esperanza matemática cero y desviación típica uno). Para el segundo conjunto, cada $g_{X_i}(\xi_i)$ es una FDP rectangular, para la que también X_i tiene esperanza

matemática cero y desviación típica uno. El tercer conjunto es idéntico al segundo, excepto en que la FDP para $g_{x_4}(\xi_4)$ tiene una desviación típica de valor diez.

NOTA En la referencia bibliográfica [13] puede consultarse más información sobre modelos aditivos, como el modelo (21), donde las FDP son gaussianas o rectangulares, o una combinación de ambas.

9.2.2 Magnitudes de entrada distribuidas normalmente (gaussianas)

9.2.2.1 Asígnese una FDP gaussiana típica a cada X_i . Las mejores estimaciones para X_i son $x_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, con incertidumbres típicas asociadas $u(x_i) = 1$.

9.2.2.2 Los resultados obtenidos se resumen en las cinco primeras columnas de la tabla 2, dándose éstos con tres cifras significativas, a fin de facilitar su comparación (véase el apartado 9.1.3).

NOTA Se determina el intervalo de cobertura simétrico con probabilidad del 95 %, ya que se sabe que la FDP para Y es simétrica en este caso, al igual que en los otros casos considerados en este ejemplo.

9.2.2.3 La ley de propagación de la incertidumbre [GUM: 1995, 5.1.2] proporciona la estimación $y = 0,0$ de Y , y una incertidumbre típica asociada $u(y) = 2,0$, empleando una tolerancia numérica de dos decimales significativos para $u(y)$ ($\delta = 0,05$) (véase el apartado 5.5). Un intervalo de cobertura simétrico con probabilidad del 95 % para Y , basado en un factor de cobertura 1,96 es $[-3,9; 3,9]$.

9.2.2.4 De la aplicación del MMC (apartado 7) con $M = 10^5$ reiteraciones resulta $y = 0,0$, $u(y) = 2,0$ y el intervalo de cobertura simétrico con probabilidad del 95 % $[-3,9; 3,9]$. Dos aplicaciones más del método, con $M = 10^6$ reiteraciones, concuerdan con estos resultados dentro de la tolerancia numérica empleada. Estas dos aplicaciones más (diferentes muestras aleatorias tomadas de las FDP) se realizaron para mostrar la variación en los resultados obtenidos. Los valores numéricos cuarto y quinto de M ($1,23 \times 10^6$ y $1,02 \times 10^6$) son el número de reiteraciones para dos aplicaciones del método adaptable de Monte Carlo (véase el apartado 7.9) empleando una tolerancia numérica $\delta/5$ (véase el apartado 8.2).

9.2.2.5 La FDP para Y obtenida analíticamente es la FDP gaussiana con esperanza matemática cero y desviación típica dos.

9.2.2.6 La Figura 6 muestra la FDP (gaussiana) para Y resultante del enfoque GUM. También muestra una de las aproximaciones (distribución de frecuencias agrupadas (histograma) de $M = 10^6$ valores de Y) que constituyen la representación discreta de \mathbf{G} (véase el apartado 7.5) proporcionada por el MMC. Los límites del intervalo de cobertura simétrico con probabilidad del 95 % proporcionado por ambos métodos se muestran como líneas verticales. La FDP y la aproximación son visualmente indistinguibles, como también lo son los respectivos intervalos de cobertura. En este ejemplo era de esperar tal coincidencia (para un valor suficientemente grande de M), ya que se cumplen todas las condiciones necesarias para la aplicación del enfoque GUM (véase el apartado 5.7).

Tabla 2 — Aplicación al modelo (21), con una FDP gaussiana típica asignada a cada X_i , (a) del enfoque GUM (EGUM), (b) del MMC y (c) de una aproximación analítica (9.2.2.2, 9.2.2.7, 9.2.3.4)

Método	M	y	$u(y)$	Intervalo de cobertura simétrico con probabilidad del 95 %	d_{inf}	d_{sup}	¿EGUM validado ($\delta = 0,05$)?
EGUM		0,00	2,00	[-3,92; 3,92]			
MMC	10^5	0,00	2,00	[-3,94; 3,92]			
MMC	10^6	0,00	2,00	[-3,92; 3,92]			
MMC	10^6	0,00	2,00	[-3,92; 3,92]			
MMC adaptable	$1,23 \times 10^6$	0,00	2,00	[-3,92; 3,93]	0,00	0,01	Sí
MMC adaptable	$1,02 \times 10^6$	0,00	2,00	[-3,92; 3,92]	0,00	0,00	Sí
Analítico		0,00	2,00	[-3,92; 3,92]			

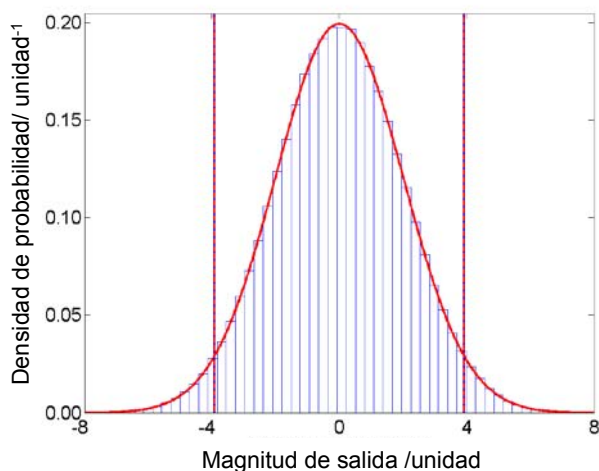


Figura 6 — Aproximaciones del modelo (21), con una FDP gaussiana típica asignada a cada X_i , a la FDP para Y proporcionada por (a) el enfoque GUM y (b) el MMC (9.2.2.6, 9.2.3.3). “Unidad” representa cualquier unidad

9.2.2.7 En las columnas 6, 7 y 8 de la tabla 2 se muestran también los resultados de aplicar los procedimientos de validación de los apartados 8.1 y 8.2. Según la terminología del apartado 7.9.2, $n_{dig} = 2$, dado que $u(y)$ muestra dos dígitos decimales significativos. Por tanto $u(y) = 2,0 = 20 \times 10^{-1}$, con lo que $c = 20$ y $l = -1$. Así pues, conforme al apartado 7.9.2, la tolerancia numérica es:

$$\delta = \frac{1}{2} \times 10^{-1} = 0,05 .$$

Las magnitudes d_{inf} y d_{sup} de las diferencias entre los límites (expresiones (19) y (20)) se muestran en la tabla 2 para las dos aplicaciones del procedimiento de Monte Carlo adaptable. También muestra si el enfoque GUM ha resultado validado para $\delta = 0,05$.

9.2.2.8 La Figura 7 muestra la amplitud $y_{sup} - y_{inf}$ del intervalo de cobertura del 95 % para Y (véase el apartado 7.7), como una función de la probabilidad en su límite izquierdo, determinada a partir de G . Tal como se espera de una FDP simétrica, el intervalo adquiere la menor amplitud cuando se sitúa simétricamente con respecto a la esperanza matemática.

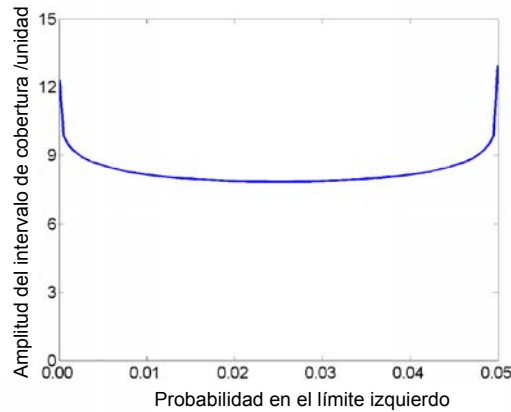


Figura 7 — Amplitud del intervalo de cobertura del 95 %, en función de la probabilidad en su límite izquierdo, para la representación discreta G de la función de distribución obtenida al aplicar el MMC al modelo (21) (9.2.2.8, 9.4.2.2.11)

9.2.2.9 El apartado 9.4 presenta un ejemplo de una FDP asimétrica para la que el intervalo mínimo difiere apreciablemente del intervalo de probabilidad simétrico.

9.2.3 Magnitudes de entrada distribuidas rectangularmente con la misma amplitud

9.2.3.1 Asígnese una FDP rectangular a cada X_i , de forma que X_i tenga una esperanza matemática nula y una desviación típica unidad (en contraste con el apartado 9.2.2.1 donde se asignaba una FDP gaussiana). De nuevo, las mejores estimaciones de X_i son $x_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, con incertidumbres típicas asociadas $u(x_i) = 1$.

9.2.3.2 Siguiendo de nuevo los pasos de los apartados 9.2.2.3 a 9.2.2.5, se obtienen los resultados mostrados en la tabla 3. La solución analítica para los límites del intervalo de cobertura simétrico con probabilidad del 95 %, $\pm 2\sqrt{3}\left[2 - (3/5)^{1/4}\right] \approx \pm 3,88$, se obtuvo según se describe en el anexo E.

Tabla 3 — Como la tabla 2 pero para FDP rectangulares, para las que las X_i tienen las mismas esperanzas matemáticas y desviaciones típicas (9.2.3.2, 9.2.3.3, 9.2.3.4)

Método	M	y	$u(y)$	Intervalo de cobertura simétrico con probabilidad del 95 %	d_{inf}	d_{sup}	¿EGUM validado ($\delta = 0,05$)?
EGUM		0,00	2,00	[-3,92; 3,92]			
MMC	10^5	0,00	2,01	[-3,90; 3,89]			
MMC	10^6	0,00	2,00	[-3,89; 3,88]			
MMC	10^6	0,00	2,00	[-3,88; 3,88]			
MMC adaptable	$1,02 \times 10^6$	0,00	2,00	[-3,88; 3,89]	0,04	0,03	Sí
MMC adaptable	$0,86 \times 10^6$	0,00	2,00	[-3,87; 3,87]	0,05	0,05	No
Analítico		0,00	2,00	[-3,88; 3,88]			

9.2.3.3 La Figura 8 es la equivalente a la Figura 6 para este caso. Por comparación con la Figura 6, se advierten algunas pequeñas diferencias entre las aproximaciones a las FDP. El enfoque GUM proporciona exactamente la misma FDP para Y cuando las FDP para las X_i son gaussianas o rectangulares, ya que las esperanzas matemáticas de estas magnitudes son idénticas, como también lo son las desviaciones típicas, en ambos casos. La FDP proporcionada por el MMC toma valores inferiores a los proporcionados por el enfoque GUM, en las proximidades de la esperanza matemática y , y en menor medida, hacia las colas, tomando valores ligeramente superiores en los

flancos. Los límites de los intervalos de cobertura proporcionados son, de nuevo, visualmente indistinguibles, aunque la tabla 3 muestra pequeñas diferencias.

9.2.3.4 El intervalo de cobertura simétrico con probabilidad del 95 % determinado sobre la base del enfoque GUM es, en este caso, ligeramente más conservador que el obtenido analíticamente. El procedimiento de validación empleado ha sido el mismo que para las magnitudes distribuidas normalmente (columnas 6 a 8 de la tabla 3). Igual que entonces, $n_{\text{dig}} = 2$, $u(y) = 20 \times 10^{-1}$, $c = 20$, $l = -1$ y $\delta = 0,05$. Las diferencias entre los límites d_{inf} y d_{sup} son mayores que en el caso de las magnitudes distribuidas normalmente (tabla 2). En la primera de las dos aplicaciones del procedimiento de Monte Carlo adaptable, el enfoque GUM resulta validado. En la segunda aplicación, no resulta validado, aunque d_{inf} y d_{sup} para esta aplicación están cercanos a la tolerancia numérica $\delta = 0,05$ (lo que se vería si se tomaran más decimales que los utilizados en la tabla 3). Diferentes resultados de validación como éstos son la consecuencia ocasional de la naturaleza estocástica del método de Monte Carlo, especialmente en un caso como el que aquí se presenta.

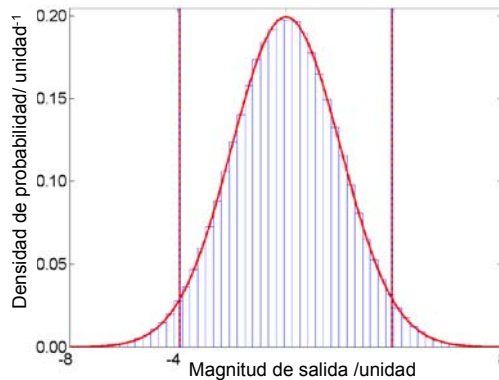


Figura 8 — Equivalente a la Figura 6 para magnitudes con las mismas esperanzas matemáticas y desviaciones típicas, pero con FDP rectangulares (9.2.3.3)

9.2.4 Magnitudes de entrada distribuidas rectangularmente, con diferentes amplitudes

9.2.4.1 Considérese el ejemplo del apartado 9.2.3, excepto que X_4 tiene una desviación típica de diez en lugar de la unidad. La tabla 4 contiene los resultados obtenidos.

9.2.4.2 Los números M de reiteraciones de Monte Carlo realizadas por el procedimiento adaptable ($0,03 \times 10^6$ y $0,08 \times 10^6$) son mucho más pequeños de lo que fueron en los dos casos anteriores de este ejemplo. La principal razón es que, en este caso, $\delta = 0,5$, la tolerancia numérica resultante de la exigencia de tener, como antes, dos dígitos decimales significativos en $u(y)$, es diez veces el valor previo. En caso de utilizar el valor previo, M sería del orden de 100 veces mayor.

Tabla 4 — Como la tabla 3, excepto que la cuarta magnitud de entrada tiene una desviación típica 10 en lugar de 1, y que no se proporciona ninguna solución analítica (9.2.4.1, 9.2.4.5)

Método	M	y	$u(y)$	Intervalo de cobertura simétrico con probabilidad del 95 %	d_{inf}	d_{sup}	¿EGUM validado ($\delta = 0,5$)?
EGUM		0,0	10,1	[-19,9; 19,9]			
MMC	10^5	0,0	10,2	[-17,0; 17,0]			
MMC	10^6	0,0	10,2	[-17,0; 17,0]			
MMC	10^6	0,0	10,1	[-17,0; 17,0]			
MMC adaptable	$0,03 \times 10^6$	0,1	10,2	[-17,1; 17,1]	2,8	2,8	No
MMC adaptable	$0,08 \times 10^6$	0,0	10,1	[-17,0; 17,0]	2,9	2,9	No

9.2.4.3 La Figura 9 muestra las dos aproximaciones obtenidas para la FDP de Y, las cuales difieren apreciablemente. El dominio de la FDP de X_4 es evidente. La FDP de Y recuerda a la de X_4 , pero con un efecto en los flancos debido a las FDP de las otras X_i .

9.2.4.4 La Figura 9 muestra también los límites del intervalo de cobertura simétrico con probabilidad del 95 % para Y obtenido de tales aproximaciones. La pareja de líneas verticales internas indica los límites del intervalo de cobertura simétrico con probabilidad del 95 % determinado por el MMC. La pareja de líneas externas resulta del enfoque GUM, con un factor de cobertura $k = 1,96$.

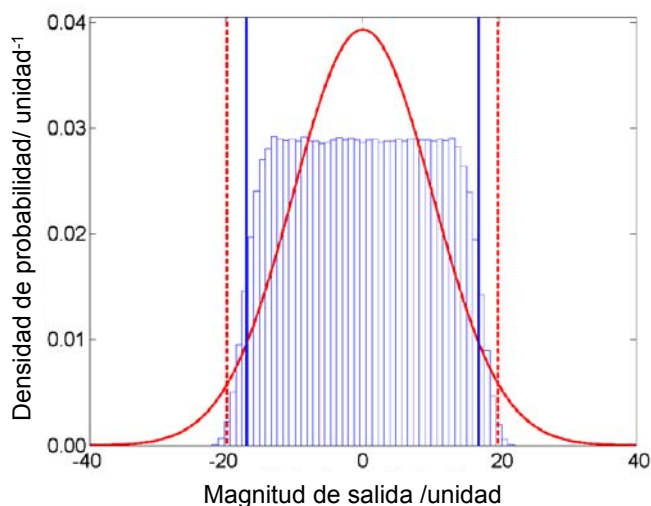


Figura 9 — Como la Figura 8, excepto que la cuarta magnitud de entrada tiene una desviación típica de diez, en lugar de la unidad (9.2.4.3, 9.2.4.4)

9.2.4.5 El intervalo de cobertura simétrico con probabilidad del 95 % determinado a partir del enfoque GUM es, en este caso, más conservador que el obtenido empleando el MMC. De nuevo, se aplicó el procedimiento de validación (columnas 6 a 8 de la tabla 4). Ahora, $n_{\text{dig}} = 2$, $u(y) = 1,0 \times 10^1 = 10 \times 10^0$, $c = 10$, $l = 0$ y $\delta = 1/2 \times 10^0 = 0,5$. Para las dos aplicaciones del procedimiento Monte Carlo adaptable, el enfoque GUM no resulta validado. Para una tolerancia numérica de un dígito decimal significativo en $u(y)$; es decir, $n_{\text{dig}} = 1$, para la que $\delta = 5$, la validación sería positiva en ambos casos, siendo los dos intervalos de cobertura del 95 % $[-2 \times 10^1; 2 \times 10^1]$. Véase el apartado 4.13.

NOTA Las condiciones para la aplicación del teorema del límite central no se cumplen bien en esta circunstancia [GUM: 1995, G.6.5], a causa del efecto dominante de la FDP rectangular de X_4 (véase el apartado 5.7.2). Sin embargo, dado que es frecuente asumir en la práctica el cumplimiento de tales condiciones, especialmente al utilizar software comercial para la evaluación de la incertidumbre (cf. 9.4.2.5, nota 3), en este apartado, al asumir la aplicabilidad de este teorema, a efectos de comparación, se caracteriza la Y mediante una FDP gaussiana.

9.3 Calibración de masa

9.3.1 Formulación

9.3.1.1 Considérese la calibración de una pesa W de densidad de masa ρ_W por comparación con una pesa de referencia R de densidad de masa ρ_R que tiene la misma masa nominal, mediante el

uso de una balanza que funciona en aire de densidad ρ_a [39]. Como generalmente ρ_W y ρ_R son diferentes, es necesario tener en cuenta los efectos del empuje del aire. Aplicando el principio de Arquímedes, el modelo toma la forma:

$$m_W(1 - \rho_a / \rho_W) = (m_R + \delta m_R)(1 - \rho_a / \rho_R), \quad (22)$$

donde δm_R es la masa de una pesa pequeña de densidad ρ_R que se añade a R para equilibrarla con W.

9.3.1.2 Habitualmente se trabaja con masas convencionales. La masa convencional $m_{W,c}$ de W es la masa de una pesa (hipotética) de densidad $\rho_0 = 8\,000\text{ kg/m}^3$ que equilibra a W en un aire de densidad $\rho_{a_0} = 1,2\text{ kg/m}^3$. Por lo tanto,

$$m_W(1 - \rho_{a_0} / \rho_W) = m_{W,c}(1 - \rho_{a_0} / \rho_0).$$

9.3.1.3 Trabajando con las masas convencionales $m_{W,c}$, $m_{R,c}$ y $\delta m_{R,c}$, el modelo (22) se convierte en:

$$m_{W,c}(1 - \rho_a / \rho_W)(1 - \rho_{a_0} / \rho_W)^{-1} = (m_{R,c} + \delta m_{R,c})(1 - \rho_a / \rho_R)(1 - \rho_{a_0} / \rho_R)^{-1}, \quad (23)$$

y, a partir de éste, en una aproximación adecuada para la mayor parte de los casos,

$$m_{W,c} = (m_{R,c} + \delta m_{R,c}) \left[1 + (\rho_a - \rho_{a_0}) \left(\frac{1}{\rho_W} - \frac{1}{\rho_R} \right) \right].$$

Sea

$$\delta m = m_{W,c} - m_{\text{nom}}$$

la desviación de $m_{W,c}$ respecto a la masa nominal:

$$m_{\text{nom}} = 100\text{ g}.$$

El modelo utilizado en este ejemplo vendrá dado por:

$$\delta m = (m_{R,c} + \delta m_{R,c}) \left[1 + (\rho_a - \rho_{a_0}) \left(\frac{1}{\rho_W} - \frac{1}{\rho_R} \right) \right] - m_{\text{nom}}. \quad (24)$$

NOTA La aplicación de la ley de propagación de incertidumbres al modelo "exacto" (23) se hace difícil debido a la complejidad algebraica de las derivadas parciales. Es más fácil aplicar el MMC, porque sólo necesitan evaluarse valores del modelo.

9.3.1.4 La única información disponible referente a $m_{R,c}$ y a $\delta m_{R,c}$ es la mejor estimación y la incertidumbre típica asociada a cada una de estas magnitudes. De acuerdo con esto, según el apartado 6.4.7.1, se asigna una distribución gaussiana a cada una de estas magnitudes, utilizando estas estimaciones como esperanzas matemáticas de las magnitudes correspondientes y las incertidumbres típicas asociadas como desviaciones típicas. La única información accesible referente a ρ_a , ρ_W y ρ_R son los límites superiores e inferiores para estas magnitudes. De acuerdo con esto, según el apartado 6.4.2.1, se asigna una distribución rectangular a cada una de estas magnitudes, con límites iguales a los extremos de la distribución. La tabla 5 resume las magnitudes de entrada y las funciones de densidad de probabilidad asignadas. En la tabla se describe una

distribución gaussiana $N(\mu, \sigma^2)$ mediante su esperanza matemática μ y su desviación típica σ , y una distribución rectangular $R(a, b)$ con extremos a y b ($a < b$) mediante la esperanza matemática $(a + b) / 2$ y la semiamplitud $(b - a) / 2$.

NOTA A la magnitud ρ_{a_0} en el modelo de calibración de masa (24) se le asigna el valor $1,2 \text{ kg/m}^3$ sin incertidumbre asociada.

Tabla 5 — Magnitudes de entrada X_i y funciones de densidad de probabilidad asignadas a las mismas para el modelo de calibración de masa (24) (9.3.1.4)

X_i	Distribución	Parámetros			
		Esperanza matemática μ	Desviación típica σ	Esperanza matemática $x = (a + b) / 2$	Semiamplitud $(b - a) / 2$
$m_{R,c}$	$N(\mu, \sigma^2)$	100 000,000 mg	0,050 mg		
$\delta m_{R,c}$	$N(\mu, \sigma^2)$	1,234 mg	0,020 mg		
ρ_a	$R(a, b)$			$1,20 \text{ kg/m}^3$	$0,10 \text{ kg/m}^3$
ρ_W	$R(a, b)$			$8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$	$1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
ρ_R	$R(a, b)$			$8,00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$	$0,05 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

9.3.2 Propagación y conclusiones

9.3.2.1 Tanto el enfoque GUM como el procedimiento Monte Carlo adaptable (véase el apartado 7.9) se utilizaron para obtener una estimación $\delta \hat{m}$ de δm , su incertidumbre típica asociada $u(\delta \hat{m})$ y el menor intervalo de cobertura del 95 % para δm . Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 6, en la que EGUM₁ representa el enfoque GUM con términos de primer orden, MMC el procedimiento Monte Carlo adaptable, y EGUM₂ el enfoque GUM con términos de orden superior.

9.3.2.2 Se realizaron $0,72 \times 10^6$ reiteraciones con el procedimiento Monte Carlo adaptable con una tolerancia numérica de $\delta / 5$ (véase el apartado 8.2) en el que δ se estableció para el caso en que se considera representativo un dígito decimal significativo en $u(\delta \hat{m})$ (véase el apartado 9.3.2.6).

9.3.2.3 La Figura 10 muestra las aproximaciones a la FDP para δm obtenidas del enfoque GUM con términos de primer orden y el MMC. La curva continua representa una FDP gaussiana con parámetros dados por el enfoque GUM. La pareja de líneas verticales discontinuas internas representa el menor intervalo de cobertura del 95 % para δm , basado en esta FDP. El histograma es la distribución de frecuencias obtenida utilizando el MMC como aproximación a la FDP. La pareja de líneas verticales continuas externas representa el menor intervalo de cobertura del 95 % para δm , basado en la representación discreta de la función de distribución determinada como en el apartado 7.5.

Tabla 6 — Resultados de la etapa de cálculo para el modelo de calibración de masa (24) (9.3.2.1, 9.3.2.6)

Método	$\delta \hat{m}$ /mg	$u(\delta \hat{m})$ /mg	Menor intervalo de cobertura del 95 % /mg	d_{inf} /mg	d_{sup} /mg	¿EGUM validado ($\delta = 0,005$)?
EGUM ₁	1,234 0	0,053 9	[1,128 5; 1,339 5]	0,045 1	0,043 0	No
MMC	1,234 1	0,075 4	[1,083 4; 1,382 5]			
EGUM ₂	1,234 0	0,075 0	[1,087 0; 1,381 0]	0,003 6	0,001 5	Sí

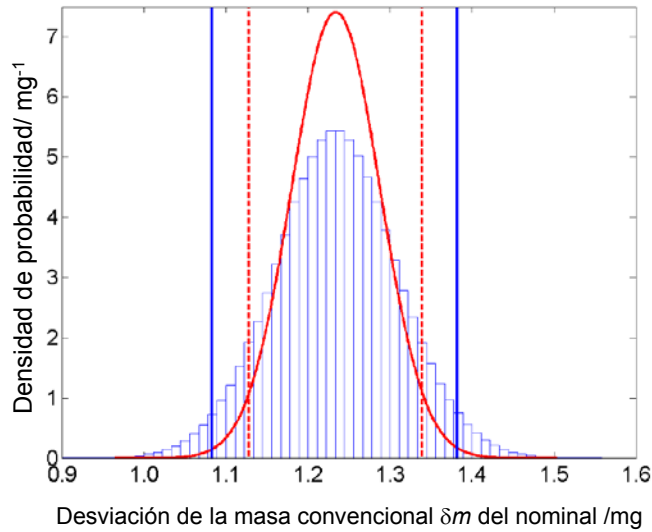


Figura 10 — Aproximaciones a la FDP para la magnitud de salida δm obtenidas utilizando el enfoque GUM con términos de primer orden y el MMC (9.3.2.3)

9.3.2.4 Los resultados muestran que, aunque el enfoque GUM (primer orden) y el método de Monte Carlo dan estimaciones concordantes de δm , los valores numéricos para la incertidumbre típica asociada son notablemente diferentes. El valor (0,075 4 mg) de $u(\delta\hat{m})$ proporcionado por el método de Monte Carlo es un 40% mayor que el proporcionado (0,053 9 mg) por el enfoque GUM (primer orden). Este último es por lo tanto más optimista. Existe un buen acuerdo entre la $u(\delta\hat{m})$ determinada por el método de Monte Carlo y el valor (0,075 0 mg) proporcionado por el enfoque GUM con términos de orden superior.

9.3.2.5 La tabla 7 contiene las derivadas parciales de primer orden para el modelo (24) con respecto a las magnitudes de entrada junto con los coeficientes de sensibilidad, habiéndose evaluado estas derivadas para las mejores estimaciones de las magnitudes de entrada. Estas derivadas indican que, para los fines del enfoque GUM con términos de primer orden, el modelo de este ejemplo puede considerarse reemplazable por el modelo aditivo:

$$\delta m = m_{R,c} + \delta m_{R,c} - m_{nom}$$

El método de Monte Carlo no realiza tal aproximación (implícita) al modelo.

Tabla 7 — Coeficientes de sensibilidad para el modelo de calibración de masa (24) (9.3.2.5)

X_i	Derivada parcial	Coefficiente de sensibilidad
$m_{R,c}$	$1 + (\rho_a - \rho_{a0}) (1 / \rho_W - 1 / \rho_R)$	1
$\delta m_{R,c}$	$1 + (\rho_a - \rho_{a0}) (1 / \rho_W - 1 / \rho_R)$	1
ρ_a	$(m_{R,c} + \delta m_{R,c}) (1 / \rho_W - 1 / \rho_R)$	0
ρ_W	$-(m_{R,c} + \delta m_{R,c}) (\rho_a - \rho_{a0}) / \rho_W^2$	0
ρ_R	$(m_{R,c} + \delta m_{R,c}) (\rho_a - \rho_{a0}) / \rho_R^2$	0

9.3.2.6 La tabla 6 también muestra en sus tres columnas situadas más a la derecha los resultados de aplicar el procedimiento de los apartados 8.1 y 8.2 al caso en que un dígito decimal significativo

en $u(\delta\hat{m})$ se considera representativo. Utilizando la terminología de este apartado, $n_{\text{dig}} = 1$, ya que se requiere una tolerancia numérica de un dígito decimal significativo en $u(\delta\hat{m})$. De aquí que $u(\delta\hat{m}) = 0,08 = 8 \times 10^{-2}$, y así c (apartado 7.9.2) es igual a 8 y $l = -2$. Por lo tanto, $\delta = 1/2 \times 10^{-2} = 0,005$. Los valores d_{inf} y d_{sup} son las diferencias entre los extremos (19) y (20), en los que y corresponde a $\delta\hat{m}$. En la columna final de la tabla se indica si los resultados fueron validados hasta un dígito decimal significativo en $u(\delta\hat{m})$. Si sólo los términos de primer orden se han tomado en cuenta, la aplicación del enfoque GUM no resulta validada. Si se toman en cuenta términos de orden superior [GUM: 1995, 5.1.2, nota], el enfoque GUM resulta validado. Por lo tanto, la no linealidad del modelo hace que tomar sólo los términos de primer orden no resulte adecuado.

9.4 Pérdida por comparación en la calibración de un medidor de potencia de microondas

9.4.1 Formulación

9.4.1.1 Durante la calibración de un medidor de potencia de microondas, el medidor de potencia y un medidor de potencia patrón se conectan sucesivamente a un generador de señal estable. La potencia absorbida por cada medidor será en general diferente debido a que sus coeficientes de reflexión de tensión de entrada complejos no son idénticos. La relación Y entre la potencia P_M absorbida por el medidor a calibrar y la correspondiente, P_S , del medidor patrón es [43]:

$$Y = \frac{P_M}{P_S} = \frac{1 - |\Gamma_M|^2}{1 - |\Gamma_S|^2} \times \frac{|1 - \Gamma_S \Gamma_G|^2}{|1 - \Gamma_M \Gamma_G|^2}, \quad (25)$$

donde Γ_G es el coeficiente de reflexión de tensión del generador de señal, Γ_M el del medidor a calibrar y Γ_S el del medidor patrón. Esta relación de potencia es un ejemplo de "pérdida por comparación" [1,28].

9.4.1.2 Considérese el caso en que el patrón y el generador de señal no presentan reflexión; es decir, $\Gamma_S = \Gamma_G = 0$, y que los valores medidos se obtienen a partir de las partes real e imaginaria X_1 y X_2 de $\Gamma_M = X_1 + j X_2$, donde $j^2 = -1$.

Puesto que $|\Gamma_M|^2 = X_1^2 + X_2^2$, la fórmula (25) queda:

$$Y = 1 - X_1^2 - X_2^2. \quad (26)$$

9.4.1.3 Sean x_1 y x_2 respectivamente las mejores estimaciones de las magnitudes de medida X_1 y X_2 y $u(x_1)$ $u(x_2)$ sus incertidumbres típicas asociadas. Las magnitudes X_1 y X_2 no suelen ser independientes. La covarianza asociada a x_1 y x_2 se denota por $u(x_1, x_2)$. De forma equivalente [GUM: 1995, 5.2.2], $u(x_1, x_2) = r(x_1, x_2)u(x_1)u(x_2)$, donde $r = r(x_1, x_2)$ denota el coeficiente de correlación asociado [GUM: 1995, 5.2.2].

NOTA En la práctica, el ingeniero eléctrico en ocasiones puede tener dificultades para cuantificar la covarianza. En tales casos, la evaluación de la incertidumbre puede repetirse con diferentes valores numéricos de reiteración para el coeficiente de correlación al objeto de estudiar sus efectos. Este ejemplo presenta cálculos utilizando un coeficiente de correlación nulo y de valor 0,9 (cf. 9.4.1.7).

9.4.1.4 Con base en el apartado 6.4.8.1, a $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ se le asigna una FDP gaussiana bivalente en X_1 y X_2 , con esperanza matemática y matriz de covarianza:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u^2(x_1) & ru(x_1)u(x_2) \\ ru(x_1)u(x_2) & u^2(x_2) \end{bmatrix} \quad (27)$$

9.4.1.5 Debido a que los valores de X_1 y X_2 en la expresión (26) son, en la práctica, pequeños comparados con la unidad, la Y resultante se aproxima a la unidad. En consecuencia, los resultados se expresan en términos de la magnitud:

$$\delta Y = 1 - Y = X_1^2 + X_2^2, \quad (28)$$

considerada como el modelo de medida. Por razones físicas, $0 \leq Y \leq 1$, y por lo tanto $0 \leq \delta Y \leq 1$.

9.4.1.6 Se considerarán la determinación de una estimación δy de δY , su incertidumbre típica asociada $u(\delta y)$, y un intervalo de cobertura de δY para la elección de x_1 , x_2 , $u(x_1)$, $u(x_2)$ y $r(x_1, x_2)$. Todas las magnitudes tienen dimensión 1.

9.4.1.7 Se consideran seis casos, en todos ellos x_2 se toma como nula y $u(x_1) = u(x_2) = 0,005$. Los primeros tres casos corresponden a tomar $x_1 = 0$; $x_1 = 0,010$ y $x_1 = 0,050$, cada uno con $r(x_1, x_2) = 0$. Los otros tres casos corresponden a tomar el mismo x_1 , pero con $r(x_1, x_2) = 0,9$. Los diversos valores numéricos de x_1 (comparables a los que se dan en la práctica) se utilizan para investigar el alcance de la discrepancia con los resultados obtenidos utilizando las aproximaciones consideradas.

9.4.1.8 Para los casos en que $r = r(x_1, x_2) = 0$, la matriz de covarianza dada en la fórmula (27) se reduce a $\text{diag}(u^2(x_1), u^2(x_2))$ y la correspondiente distribución conjunta de X_1 y X_2 al producto de dos distribuciones gaussianas univariantes para X_i , $i = 1, 2$, con esperanza matemática x_i y desviación típica $u(x_i)$.

9.4.2 Propagación y resumen: covarianza nula

9.4.2.1 Generalidades

9.4.2.1.1 La evaluación de la incertidumbre se realiza aplicando la propagación de distribuciones

- a) analíticamente (con fines de comparación),
- b) utilizando el enfoque GUM,
- c) utilizando el MMC.

NOTA Estas aproximaciones no impiden a que la FDP de δY sea superior a la unidad. Sin embargo, para incertidumbres suficientemente pequeñas $u(x_1)$ y $u(x_2)$, como es el caso, la FDP de δY puede aproximarse adecuadamente mediante una FDP más sencilla, definida para todos los valores no negativos de δY . Es posible utilizar un tratamiento riguroso, empleando inferencia bayesiana [51], sin tener en cuenta la magnitud de los valores de $u(x_1)$ y $u(x_2)$, pero esto queda fuera del campo de aplicación de este Suplemento. Véase también apartado 1, nota 2.

9.4.2.1.2 Generalmente, δy y $u(\delta y)$ pueden determinarse analíticamente como la esperanza matemática y la desviación típica de δY , según la FDP de δY . Véase el apartado F.1. La FDP de δY puede determinarse analíticamente cuando $x_1 = 0$ y, en particular, para determinar los límites del menor intervalo de cobertura del 95 %. Véase el apartado F.2.

9.4.2.1.3 El enfoque GUM con los términos de primer orden y con los términos de orden superior se aplica a cada una de las tres estimaciones de x_1 en el caso de que no exista correlación. Véase el apartado F.3. En cada caso se determina una estimación δy de δY [GUM: 1995, 5.2.2] a partir de:

$$\delta y = x_1^2 + x_2^2.$$

9.4.2.1.4 EL MMC se aplica en cada caso con $M = 10^6$ reiteraciones.

9.4.2.2 Estimación de entrada $x_1 = 0$

9.4.2.2.1 Para la estimación de entrada $x_1 = 0$, al aplicar la ley de propagación de incertidumbres deben utilizarse los términos de orden superior, debido a que las derivadas parciales de δY con respecto a X_1 y X_2 , evaluadas en $X_1 = x_1$ y $X_2 = x_2$, son iguales a cero cuando $x_1 = x_2 = 0$. Por tanto, si se aplicara únicamente la ley de propagación de incertidumbres con los términos de primer orden, la incertidumbre típica resultante sería incorrectamente calculada como nula.

NOTA Se originaría una dificultad similar para x_1 próximo a cero.

9.4.2.2.2 La Figura 11 muestra las FDP de δY determinadas aplicando la propagación de distribuciones:

- a) analíticamente (la curva exponencialmente decreciente para $\delta Y \geq 0$ y cero en el resto),
- b) utilizando el enfoque GUM con los términos de orden superior al objeto de caracterizar la magnitud de salida mediante una FDP gaussiana (curva en forma de campana),
- c) utilizando el MMC (histograma de frecuencias).

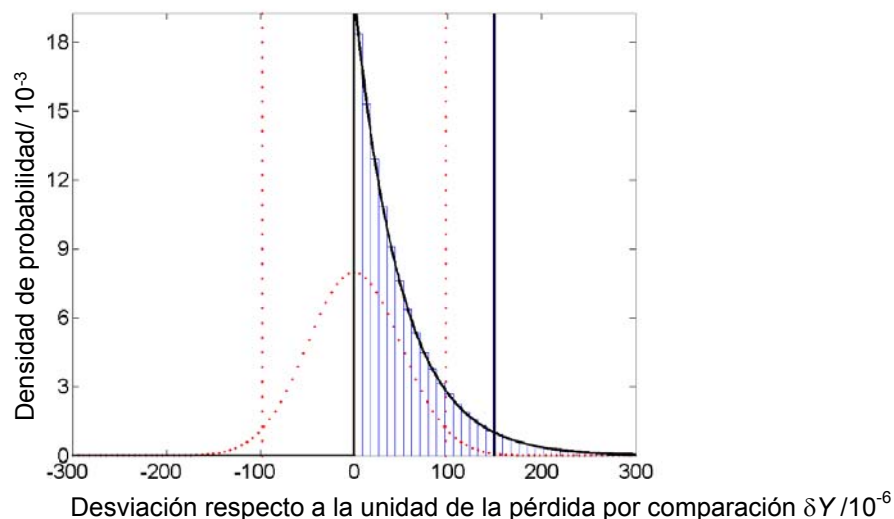


Figura 11 — Resultados para el modelo de pérdida por comparación en la calibración de un medidor de potencia en el caso $x_1 = x_2 = 0$, con $u(x_1) = u(x_2) = 0,005$ y $r(x_1, x_2) = 0$ (9.4.2.2.2, 9.4.2.2.6, 9.4.2.2.9 y 9.4.2.2.11)

9.4.2.2.3 En la Figura 11 se aprecia que la utilización del enfoque GUM con los términos de orden superior al objeto de caracterizar la magnitud de salida mediante una distribución gaussiana origina una FDP muy diferente de la solución analítica. Esta última toma la forma de una distribución chi-cuadrado específica —la suma cuadrática de dos variables gaussianas típicas (véase el apartado F.2)—.

9.4.2.2.4 Puesto que las derivadas parciales del modelo de la función modelo (28) de orden superior a dos son iguales a cero, la solución obtenida corresponde, esencialmente, a tener en cuenta todos los términos de la serie de Taylor, es decir, la no linealidad total del problema. De este modo, la distribución gaussiana específica así determinada es la mejor posible utilizando el enfoque GUM para caracterizar la magnitud de salida mediante dicha distribución.

9.4.2.2.5 Puede concluirse, por tanto, que el motivo para la desviación respecto a la solución analítica, de los resultados obtenidos mediante el enfoque GUM es que la magnitud de salida está caracterizada mediante una FDP gaussiana. Ninguna FDP gaussiana, no importa cómo se haya obtenido, podría representar adecuadamente la solución analítica en este caso.

9.4.2.2.6 Se aprecia también en la Figura 11 que la FDP proporcionada por el MMC es coherente con la solución analítica.

9.4.2.2.7 Las estimaciones δy determinadas a partir de la esperanza matemática de δY descrita mediante las FDP obtenidas:

- a) analíticamente,
- b) utilizando el enfoque GUM,
- c) aplicando el MMC,

están dadas en las columnas 2 a 4 de la fila correspondiente a $x_1 = 0,000$ en la tabla 8. Las columnas 5 a 8 contienen las correspondientes $u(\delta y)$, junto a aquellas obtenidas empleando el enfoque GUM con los términos de primer orden (G_1) y términos de orden superior (G_2).

Tabla 8 — Resultados de pérdidas por comparación, para estimaciones de entrada con covarianza asociada nula, obtenidas analíticamente (A), empleando el enfoque GUM con términos de primer orden (G_1) y términos de orden superior (G_2) y el MMC (M) (9.4.2.2.7, 9.4.2.2.10, 9.4.2.3.4 y 9.4.2.4.2)

x_1	Estimación $\delta y / 10^{-6}$			Incertidumbre típica $u(\delta y) / 10^{-6}$				Menor intervalo de cobertura del 95 % $\delta Y / 10^{-6}$			
	A	G	M	A	G_1	G_2	M	A	G_1	G_2	M
0,000	50	0	50	50	0	50	50	[0; 150]	[0; 0]	[-98; 98]	[0; 150]
0,010	150	100	150	112	100	112	112	—	[-96; 296]	[-119; 319]	[0; 367]
0,050	2 550	2 500	2 551	502	500	502	502	—	[1 520; 3 480]	[1 515; 3 485]	[1 590; 3 543]

9.4.2.2.8 La estimación $\delta y = 0$ obtenida evaluando el modelo para las estimaciones de entrada no es válida: la FDP correcta (analítica) para δY es nula para $\delta Y < 0$, esta estimación se encuentra situada en los límites de la zona no nula de dicha función. La estimación proporcionada por el MMC concuerda con la obtenida analíticamente. La ley de propagación de incertidumbres basada en términos de primer orden da el valor incorrecto cero, ya indicado, para $u(\delta y)$. El valor (50×10^{-6}), obtenido a partir de la ley de propagación de incertidumbres con términos de orden superior, concuerda con los obtenidos analíticamente y mediante el MMC.

NOTA Cuando el MMC se repitió varias veces, los resultados obtenidos tuvieron una dispersión aproximada de 50×10^{-6} . Cuando se repitió un determinado número de veces con un mayor valor de M , los resultados tuvieron, de nuevo, una dispersión aproximada de 50×10^{-6} , pero menos esparcidos. Tales efectos

de dispersión son previsible y fueron observados en los otros cálculos de Monte Carlo realizados. Sería necesario presentar los resultados con un mayor número de cifras decimales significativas al objeto de mostrar las diferencias numéricas reales.

9.4.2.2.9 La Figura 11 muestra también los menores intervalos de cobertura del 95 % para las aproximaciones correspondientes a la función de distribución de δY . El intervalo de cobertura del 95 %, indicado por líneas verticales de puntos, tal y como lo proporcionado por el enfoque GUM, no es factible: es simétrico alrededor de $\delta Y = 0$ y por lo tanto implica, erróneamente, que hay un 50 % de probabilidad de que δY sea negativo. Las líneas verticales continuas son los límites del menor intervalo de cobertura del 95 % derivados de la solución analítica, tal y como se describe en F.2. Los límites del menor intervalo de cobertura del 95 % determinados utilizando el MMC no pueden distinguirse, por la resolución de la gráfica, de aquellos derivados a partir de la solución analítica.

9.4.2.2.10 Los límites de los menores intervalos de cobertura relativos a las incertidumbres típicas en las columnas 5 a 8 de la fila correspondiente a $x_1 = 0,000$ en la tabla 8, se muestran en las columnas 9 a 12 de dicha tabla.

9.4.2.2.11 La Figura 12 muestra la amplitud del intervalo de cobertura del 95 % (véase el apartado 7.7), como una función del valor de probabilidad en su límite izquierdo, para la aproximación a la FDP proporcionada por el MMC que se muestra en la Figura 11. El intervalo de cobertura del 95 % no adquiere en este caso su amplitud mínima cuando está situado simétricamente con respecto a la esperanza matemática. En efecto, el menor intervalo de cobertura del 95 % se encuentra lo más alejado posible del intervalo de cobertura de probabilidad simétrica, siendo las probabilidades de las colas izquierda y derecha 0 % y 5 %, respectivamente, en contraposición al 2,5 % y 2,5 %. Esta figura puede compararse con la correspondiente al modelo aditivo (Figura 7) del apartado 9.2, para la cual la FDP de Y era simétrica con respecto a su esperanza matemática.

9.4.2.3 Estimación de entrada $x_1 = 0,010$

9.4.2.3.1 La Figura 13 muestra la FDP obtenida empleando el enfoque GUM, utilizando exclusivamente términos de primer orden y términos de orden superior, y utilizando el MMC para la estimación de entrada $x_1 = 0,010$ con coeficiente de correlación $r(x_1, x_2) = 0$.

9.4.2.3.2 La FDP obtenida a partir del MMC muestra un pequeño flanco a la izquierda, aunque está truncada en cero, el menor valor numérico posible de δY . Además, si se compara con los resultados obtenidos para $x_1 = 0$, su forma es más parecida a las FDP gaussianas que se obtienen mediante el enfoque GUM. Estas FDP gaussianas son a su vez razonablemente próximas entre sí, con una esperanza matemática para δY de valor $1,0 \times 10^{-4}$ y desviaciones típicas $1,0 \times 10^{-4}$ y $1,1 \times 10^{-4}$, respectivamente.

9.4.2.3.3 La Figura 13 muestra también los límites de los menores intervalos de cobertura del 95 %, obtenidos mediante las tres aproximaciones. Las líneas verticales continuas corresponden a los límites del intervalo obtenido por el MMC, las líneas verticales discontinuas a los obtenidos según el enfoque GUM con términos de primer orden, y las líneas verticales de puntos a los obtenidos aplicando el enfoque GUM con términos de orden superior. Se observa que los intervalos que se obtienen aplicando el enfoque GUM están desplazados hacia la izquierda respecto al menor intervalo de cobertura del 95 % que se obtiene con el MMC. Como consecuencia, de nuevo aparecen valores no factibles de δY . El desplazamiento es de alrededor del 70 % de la desviación típica. El intervalo obtenido con el MMC tiene su límite izquierdo en cero, siendo éste el menor valor posible.

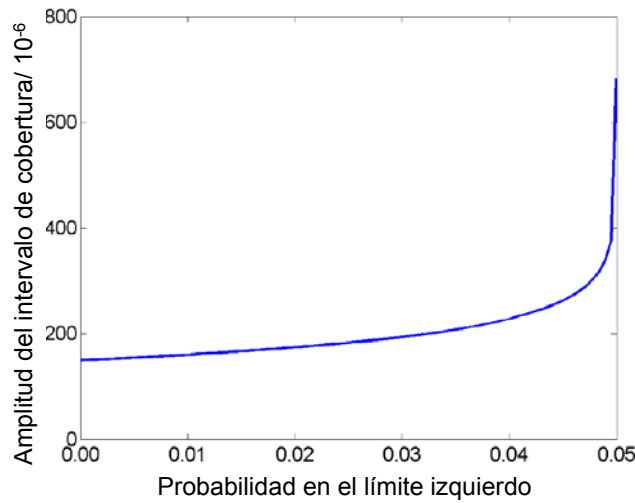


Figura 12 — La amplitud del intervalo de cobertura del 95 %, como una función del valor de probabilidad en su límite izquierdo, para la aproximación a la función de distribución obtenida aplicando el MMC al modelo (28) (9.4.2.2.11)

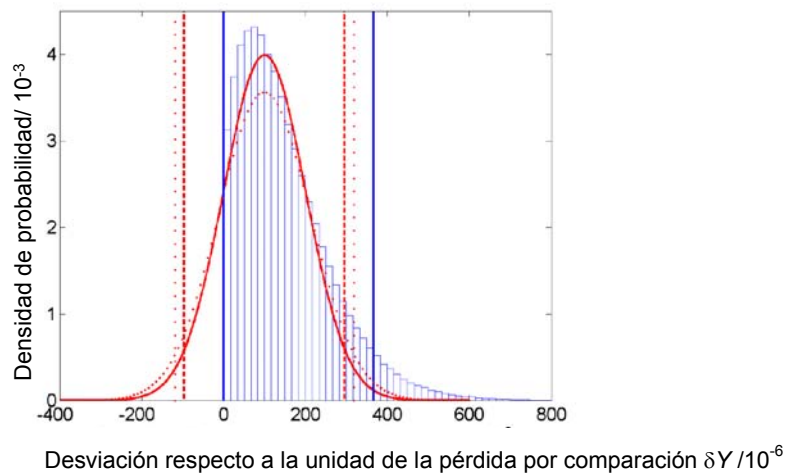


Figura 13 — Como la Figura 11, excepto que $x_1 = 0,010$ y las FDP resultantes de aplicar el enfoque GUM con términos de primer orden (curva con el pico más elevado) y con términos de orden superior (curva con el pico más bajo) (9.4.2.3.1, 9.4.2.3.3, 9.4.2.4.1 y 9.4.3.3)

9.4.2.3.4 Los resultados correspondientes se dan en la penúltima fila de la tabla 8.

9.4.2.4 Estimación de entrada $x_1 = 0,050$

9.4.2.4.1 La Figura 14 es similar a la Figura 13, pero para $x_1 = 0,050$. En este caso, las FDP que se obtienen con las dos variantes del enfoque GUM son virtualmente indistinguibles entre sí. Además, ahora están mucho más cerca de la aproximación a la FDP obtenida mediante el MMC. Esta FDP presenta una ligera asimetría, como se pone de manifiesto en las zonas de la cola. Los intervalos de cobertura que se obtienen siguiendo las dos variantes propuestas en el enfoque GUM son

aparentemente idénticos, pero aún están ligeramente desplazados con respecto a los obtenidos mediante el MMC. Este desplazamiento es, ahora, aproximadamente del 10 % de la incertidumbre típica. Los intervalos obtenidos mediante el enfoque GUM ahora sí son factibles.

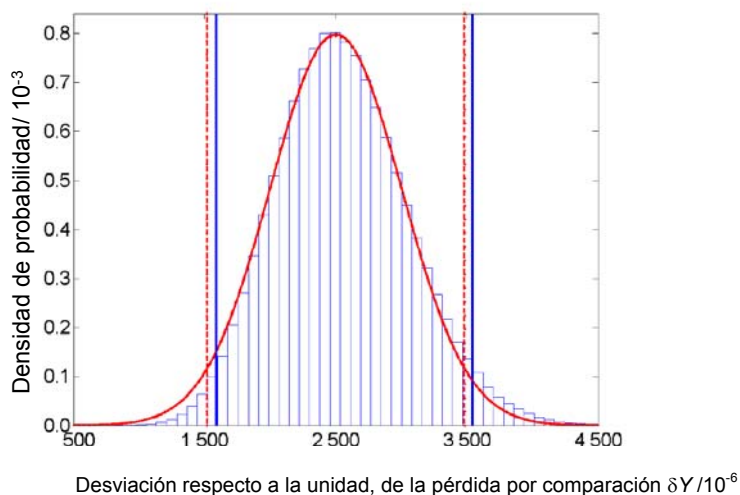


Figura 14 — Como la Figura 13 excepto que $x_1 = 0,050$ (9.4.2.4.1, 9.4.3.3)

9.4.2.4.2 Los resultados correspondientes se muestran en la última fila de la tabla 8.

9.4.2.5 Discusión

Según x_1 se va alejando de cero, los resultados obtenidos mediante el enfoque GUM, con términos de primer orden y con términos de orden superior, y aquellos obtenidos por el MMC, se aproximan cada vez más entre ellos.

NOTA 1 Los valores $x_1 = x_2 = 0$ se encuentran en el centro de la zona de interés del ingeniero eléctrico, correspondiendo a la denominada condición de “adaptación” para el medidor de potencia a calibrar, no constituyendo, por lo tanto, un caso extremo.

NOTA 2 Debido a la simetría del modelo en X_1 y X_2 , ocurrirá exactamente el mismo efecto si se utiliza x_2 en lugar de x_1 .

NOTA 3 Una razón por la cual se puede usar en la práctica el enfoque GUM, con términos de primer orden (únicamente), es que hay software disponible para su implementación: los resultados obtenidos pueden, a veces, aceptarse sin cuestionarlos. Para el caso en que $x_1 = x_2 = 0$ (Figura 11), el riesgo sería evidente debido a que la incertidumbre típica $u(\delta y)$ resultó cero y, por tanto, cualquier intervalo de cobertura de δY tendría amplitud nula para cualquier probabilidad de cobertura. Para $x_1 \neq 0$ (ó $x_2 \neq 0$), $u(\delta y)$ y la amplitud del intervalo de cobertura de δY son distintas de cero, así pues no existiría tal riesgo sin un conocimiento previo de los valores más probables de $u(\delta y)$ y de dicha amplitud. Por lo tanto, un peligro que surge en el uso de programas informáticos basados en el enfoque GUM para realizar estos cálculos, es que la verificación del programa para valores de x_1 ó x_2 suficientemente lejos de cero, no detectaría tales problemas aunque cuando se utilizara posteriormente en la práctica para valores pequeños de x_1 ó x_2 , los resultados no serían válidos, pero se aceptarían sin tener consciencia de ello.

9.4.3 Propagación y resumen: covarianza distinta de cero

9.4.3.1 Generalidades

9.4.3.1.1 Las tres aproximaciones utilizadas en los casos en que las X_i no están correlacionadas (véase el apartado 9.4.2) se aplican ahora a los tres casos en los que están correlacionadas, con $r(x_1, x_2) = 0,9$. Sin embargo, en el enfoque GUM sólo se utilizan los términos de primer orden. Al contrario de lo que ocurre cuando las X_i no están correlacionadas, el enfoque GUM no se aplica con términos de orden superior, no existiendo en la GUM la contrapartida a la fórmula con términos de orden superior cuando las x_i tienen covarianzas asociadas distintas de cero (véase el apartado 5.8). Los otros aspectos se ajustan a los del apartado 9.4.2.

9.4.3.1.2 Según el enfoque GUM con términos de primer orden, $u(\delta y)$ se evalúa según se describe en el apartado F.3.2. La expresión (F.7) en dicho apartado proporciona, para $x_2 = 0$,

$$u^2(\delta y) = 4x_1^2 u^2(x_1).$$

Consecuentemente, $u(\delta y)$ no depende de $r(x_1, x_2)$ y el enfoque GUM con términos de primer orden produce resultados idénticos a los presentados en el apartado 9.4.2. En particular, para el caso en que $x_1 = 0$, $u(\delta y)$ se obtiene (incorrectamente) como cero, igual que en el apartado 9.4.2.2.1.

9.4.3.1.3 El MMC fue implementado mediante muestreo aleatorio a partir de \mathbf{X} caracterizada mediante una FDP gaussiana bivalente con la esperanza matemática y la matriz de covarianza dadas (expresiones (27)). Se utilizó el procedimiento del apartado C.5.

NOTA Aparte del requisito de tener que realizar muestreos a partir de una distribución multivariante, la implementación del MMC para magnitudes de entrada correlacionadas no resulta más complicada que cuando no lo están.

9.4.3.2 Estimaciones de entrada $x_1 = 0; 0,010$ y $0,050$

9.4.3.2.1 La tabla 9 contiene los resultados obtenidos. Los correspondientes al MMC indican que aunque δy no está afectada por la correlación entre las X_i , $u(\delta y)$ sí está muy influenciada, más cuanto menor sea x_1 . Los intervalos de cobertura del 95 % están influenciados en consecuencia.

Tabla 9 — Resultados de pérdida por comparación, para estimadores de entrada con covarianza asociada no nula ($r(x_1, x_2) = 0,9$), obtenidos analíticamente, empleando el enfoque GUM (EGUM) y el MMC (9.4.3.2.1)

x_1	Estimación $\delta y / 10^{-6}$			Incertidumbre típica $u(\delta y) / 10^{-6}$			Menor intervalo de cobertura del 95 % $\delta Y / 10^{-6}$		
	Analítica	EGUM	MMC	Analítica	EGUM	MMC	Analítica	EGUM	MMC
0,000	50	0	50	67	0	67	—	[0, 0]	[0, 185]
0,010	150	100	150	121	100	121	—	[-96, 296]	[13, 398]
0,050	2 550	2 500	2 551	505	500	504	—	[1 520, 3 480]	[1 628, 3 555]

9.4.3.2.2 Las figuras 15 y 16 muestran las FDP proporcionadas por el enfoque GUM con términos de primer orden (curvas en forma de campana) y por el MMC (histograma de frecuencias) en los casos $x_1 = 0,010$ y $x_1 = 0,050$, respectivamente. Se muestran también los límites del menor intervalo de cobertura del 95 %, obtenidos con las dos aproximaciones, como líneas verticales discontinuas para el enfoque GUM y como líneas verticales continuas para el MMC.

NOTA Estrictamente, las condiciones bajo las cuales δY puede caracterizarse mediante una FDP gaussiana, no se cumplen aplicando el enfoque GUM en esta circunstancia (véase el apartado 5.8) [GUM:

1995, G.6.6]. Sin embargo, se muestra esta FDP y los límites del intervalo de cobertura del 95 % correspondiente, al tratarse de una caracterización comúnmente utilizada.

9.4.3.3 Discusión

En el caso $x_1 = 0,010$ (Figura 15), el efecto de la correlación ha sido modificar significativamente los resultados obtenidos por el MMC (compárese con la Figura 13). No sólo ha cambiado la forma de (la aproximación a) la FDP, sino que además el intervalo de cobertura correspondiente ya no tiene como límite izquierdo cero. En el caso $x_1 = 0,050$ (Figura 16), las diferencias entre los resultados obtenidos cuando las magnitudes de entrada están o no correlacionadas (compárese con la Figura 14) no son tan evidentes.

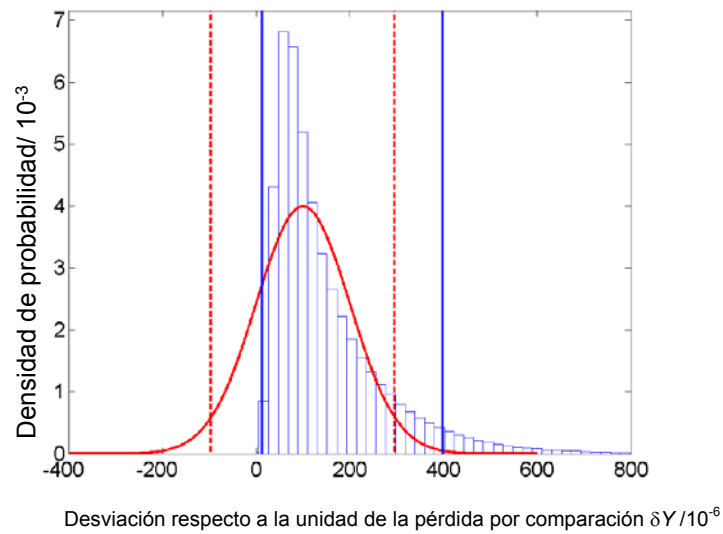


Figura 15 — Resultados para el modelo de pérdida por comparación en la calibración de un medidor de potencia en el caso $x_1 = 0,010$; $x_2 = 0$, con $u(x_1) = u(x_2) = 0,005$ y $r(x_1, x_2) = 0$ (9.4.3.2.2, 9.4.3.3)

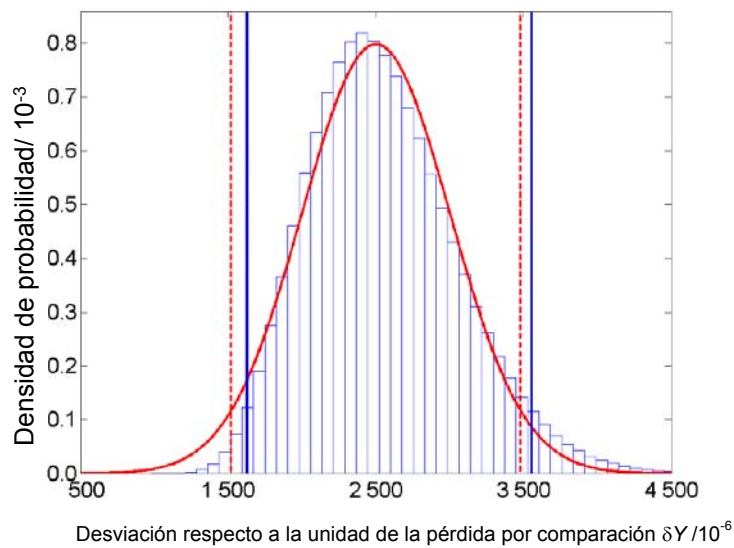


Figura 16 — Como la Figura 15 excepto que $x_1 = 0,050$ (9.4.3.2.2, 9.4.3.3)

9.5 Calibración de bloque patrón

9.5.1 Formulación: modelo

9.5.1.1 La longitud de un bloque patrón de valor nominal 50 mm se determina por comparación con un patrón de referencia conocido, de la misma longitud nominal. El resultado de la comparación de los dos bloques es la diferencia d entre sus longitudes, dada por:

$$d = L(1 + \alpha\theta) - L_s(1 + \alpha_s\theta_s), \quad (29)$$

donde L es la longitud a 20 °C del bloque en calibración, L_s es la longitud del bloque de referencia a 20 °C, dada en su certificado de calibración, α y α_s son, respectivamente, los coeficientes de dilatación térmica del bloque en calibración y del bloque de referencia, y θ y θ_s las desviaciones de temperatura, respecto a la temperatura de referencia de 20 °C, del bloque en calibración y del bloque de referencia, respectivamente.

NOTA 1 La GUM se refiere al bloque patrón como “*end gauge*” (bloque a cantos).

NOTA 2 En este Suplemento se utiliza el símbolo L para la longitud del bloque patrón, en lugar del símbolo l utilizado en la GUM para dicha magnitud.

9.5.1.2 De la expresión (29), la magnitud de salida L viene dada por:

$$L = \frac{L_s(1 + \alpha_s\theta_s) + d}{1 + \alpha\theta} \quad (30)$$

de la cual puede, a efectos prácticos, pasarse a la aproximación:

$$L = L_s + d + L_s(\alpha_s\theta_s - \alpha\theta). \quad (31)$$

Si la diferencia de temperatura entre el bloque patrón a calibrar y el bloque de referencia se escribe en la forma $\delta\theta = \theta - \theta_s$, y la diferencia entre los coeficientes de dilatación lineal como $\delta\alpha = \alpha - \alpha_s$, los modelos (30) y (31) se transforman, respectivamente, en:

$$L = \frac{L_s[1 + \alpha_s(\theta - \delta\theta)] + d}{1 + (\alpha_s + \delta\alpha)\theta} \quad (32)$$

y

$$L = L_s + d - L_s(\theta\delta\alpha + \alpha_s\delta\theta). \quad (33)$$

9.5.1.3 La diferencia d entre las longitudes de ambos bloques se determina como el valor medio de una serie de cinco indicaciones de diferencias, obtenidas independientemente, utilizando un comparador calibrado. d Puede expresarse como:

$$d = D + d_1 + d_2, \quad (34)$$

donde D es una magnitud realizada a partir de la media de las cinco indicaciones, y d_1 y d_2 son magnitudes que describen, respectivamente, los efectos aleatorios y sistemáticos asociados a la utilización del comparador.

9.5.1.4 La magnitud θ , que representa la desviación de la temperatura respecto a 20 °C del bloque patrón en calibración, puede expresarse como:

$$\theta = \theta_0 + \Delta \tag{35}$$

donde θ_0 es una magnitud que representa la desviación media de la temperatura del bloque respecto a 20 °C y Δ una magnitud que describe una variación cíclica de la desviación de la temperatura respecto a θ_0 .

9.5.1.5 Sustituyendo las expresiones (34) y (35) en las expresiones (32) y (33), y trabajando con la magnitud δL que representa la desviación de L respecto a la longitud nominal, $L_{\text{nom}} = 50 \text{ mm}$, del bloque patrón, se obtienen:

$$\delta L = \frac{L_s [1 + \alpha_s (\theta_0 + \Delta - \delta\theta)] + D + d_1 + d_2}{1 + (\alpha_s + \delta\alpha)(\theta_0 + \Delta)} - L_{\text{nom}} \tag{36}$$

y

$$\delta L = L_s + D + d_1 + d_2 - L_s [\delta\alpha(\theta_0 + \Delta) + \alpha_s \delta\theta] - L_{\text{nom}} \tag{37}$$

como modelos para el problema de medida.

9.5.1.6 Aquí, el tratamiento del problema de medida se realiza según los modelos (36) y (37), con δL como magnitud de salida, y L_s , D , d_1 , d_2 , α_s , θ_0 , Δ , $\delta\alpha$ y $\delta\theta$ como magnitudes de entrada. Difiere del dado en el ejemplo H.1 de la GUM, donde los modelos (34) y (35) son tratados como submodelos de los modelos (32) y (33); es decir, el enfoque GUM se aplica a cada modelo (34) y (35), utilizándose los resultados obtenidos para proporcionar información sobre las magnitudes de entrada d y θ en los modelos (32) y (33). Aquí, el tratamiento evita tener que utilizar los resultados obtenidos al aplicar el MMC a los submodelos (34) y (35) para proporcionar información sobre las distribuciones de las magnitudes de entrada d y θ en las expresiones (32) y (33).

9.5.2 Formulación: asignación de FDP

9.5.2.1 Generalidades

En los siguientes apartados se proporciona la información disponible sobre cada magnitud de entrada en los modelos (36) y (37).

Tabla 10 — FDP asignadas a las magnitudes de entrada para los modelos (36) y (37) del bloque patrón, en base a la información disponible (9.5.2.1). La tabla 1 incluye información general sobre estas FDP

Magnitud	FDP	Parámetros					
		μ	σ	ν	a	b	d
L_s	$t_1(\mu, \sigma^2)$	50 000 623 nm	25 nm	18			
D	$t_1(\mu, \sigma^2)$	215 nm	6 nm	24			
d_1	$t_1(\mu, \sigma^2)$	0 nm	4 nm	5			
d_2	$t_1(\mu, \sigma^2)$	0 nm	7 nm	8			
α_s	R(a,b)				$9,5 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$	$13,5 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$	
θ_0	N(μ, σ^2)	-0,1 °C	0,2 °C				
Δ	U(a,b)				-0,5 °C	0,5 °C	
$\delta\alpha$	CTrap(a,b,d)				$-1,0 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$	$1,0 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$	$0,1 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
$\delta\theta$	CTrap(a,b,d)				-0,050 °C	0,050 °C	0,025 °C

Esta información se extrae de la descripción dada en la GUM, y para cada pieza de información se identifica el apartado de la GUM de donde se toma. También se proporciona una interpretación de la información en términos de asignación de una distribución a la magnitud. La tabla 10 resume las asignaciones realizadas.

9.5.2.2 Longitud L_s del bloque patrón de referencia

9.5.2.2.1 Información

El certificado de calibración del patrón de referencia proporciona un valor de $\hat{L}_s = 50,000\ 623$ mm como su longitud a 20 °C [GUM: 1995, H.1.5]. También suministra $U_p = 0,075$ μm como su incertidumbre expandida e indica que fue obtenida utilizando un factor de cobertura $k_p = 3$ [GUM: 1995, H.1.3.1]. El certificado especifica que los grados efectivos de libertad asociados a la incertidumbre típica combinada, de la que se obtuvo la incertidumbre expandida, es $\nu_{\text{ef}}(u(\hat{L}_s)) = 18$ [GUM: 1995, H.1.6].

9.5.2.2.2 Interpretación

Asígnese a L_s una distribución $t_i(\mu, \sigma^2)$ de Student (véase el apartado 6.4.9.7) con:

$$\mu = 50\ 000\ 623\ \text{nm}, \quad \sigma = \frac{U_p}{k_p} = \frac{75}{3}\ \text{nm} = 25\ \text{nm}, \quad \nu = 18.$$

9.5.2.3 Diferencia media de longitudes, D

9.5.2.3.1 Información

El valor medio \hat{D} de las cinco indicaciones de diferencias de longitud entre el bloque patrón en calibración y el bloque de referencia es 215 nm [GUM: 1995, H.1.5]. La desviación típica experimental histórica que caracteriza la comparación de L y L_s se determinó a partir de 25 indicaciones, obtenidas independientemente, de diferencias de longitud entre dos bloques patrón de referencia, obteniéndose 13 nm [GUM: 1995, H.1.3.2].

9.5.2.3.2 Interpretación

Asígnese a D una distribución $t_i(\mu, \sigma^2)$ de Student (véanse los apartados 6.4.9.2 y 6.4.9.6), con:

$$\mu = 215\ \text{nm}, \quad \sigma = \frac{13}{\sqrt{5}}\ \text{nm} = 6\ \text{nm}, \quad \nu = 24.$$

9.5.2.4 Efecto aleatorio d_1 del comparador

9.5.2.4.1 Información

Según el certificado de calibración del comparador utilizado para comparar L con L_s , la incertidumbre asociada a los efectos aleatorios es 0,01 μm para una probabilidad del 95 % y fue obtenida a partir de 6 indicaciones independientes [GUM: 1995, H.1.3.2].

9.5.2.4.2 Interpretación

Asígnese a d_1 una distribución $t_i(\mu, \sigma^2)$ de Student (véase el apartado 6.4.9.7), con:

$$\mu = 0 \text{ nm}, \quad \sigma = \frac{U_{0,95}}{k_{0,95}} = \frac{10}{2,57} \text{ nm} = 4 \text{ nm}, \quad \nu = 5.$$

Aquí, $k_{0,95}$ se obtiene de la tabla G.2 de la GUM con $\nu = 5$ grados de libertad y $p = 0,95$.

9.5.2.5 Efecto sistemático d_2 del comparador

9.5.2.5.1 Información

La incertidumbre del comparador debida a efectos sistemáticos viene dada en el certificado como $0,02 \mu\text{m}$ para “un nivel tres sigma” [GUM: 1995, H.1.3.2]. Para esta incertidumbre puede asumirse una fiabilidad del 25 %; así, el número de grados de libertad será $\nu_{\text{ef}}(u(\hat{d}_2)) = 8$ [GUM: 1995, H.1.6].

9.5.2.5.2 Interpretación

Asígnese a d_2 una distribución $t_\nu(\mu, \sigma^2)$ de Student (véase el apartado 6.4.9.7), con:

$$\mu = 0 \text{ nm}, \quad \sigma = \frac{U_p}{k_p} = \frac{20}{3} \text{ nm} = 7 \text{ nm}, \quad \nu = 8.$$

9.5.2.6 Coeficiente de dilatación térmica α_s

9.5.2.6.1 Información

El coeficiente de dilatación térmica del patrón de referencia viene dado como $\hat{\alpha}_s = 11,5 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, con los posibles valores de esta magnitud representados por una distribución rectangular de límites $\pm 2 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ [GUM: 1995, H.1.3.3].

9.5.2.6.2 Interpretación

Asígnese a α_s una distribución rectangular $R(a, b)$ (véase el apartado 6.4.2), con límites:

$$a = 9,5 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}, \quad b = 13,5 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}.$$

NOTA No existe información acerca de la fiabilidad de los límites por lo que se asigna una distribución rectangular con límites exactamente conocidos. Tal información puede haber sido omitida en la descripción de la GUM debido a que el correspondiente coeficiente de sensibilidad es cero, con lo que esta magnitud no contribuye a la incertidumbre en la aplicación del enfoque GUM basado únicamente en los términos de primer orden.

9.5.2.7 Desviación media de la temperatura θ_0

9.5.2.7.1 Información

Se conoce que la temperatura de la pletina portabloques es $(19,9 \pm 0,5) \text{ }^\circ\text{C}$. También se sabe que la desviación media de la temperatura es $\hat{\theta}_0 = -0,1 \text{ }^\circ\text{C}$, con una incertidumbre típica asociada, debida a la incertidumbre asociada a la temperatura media de la pletina, $u(\hat{\theta}_0) = 0,2 \text{ }^\circ\text{C}$ [GUM: 1995, H.1.3.4].

9.5.2.7.2 Interpretación

Asígnese a θ_0 una distribución gaussiana $N(\mu, \sigma^2)$ (véase el apartado 6.4.7), con:

$$\mu = -0,1 \text{ °C}, \quad \sigma = 0,2 \text{ °C}.$$

NOTA No existe información sobre la fuente de la evaluación de la incertidumbre, asignándose una distribución gaussiana. Véase también la nota de 9.5.2.6.2, respecto a tal información.

9.5.2.8 Efecto Δ de variación cíclica de la temperatura

9.5.2.8.1 Información

Se informa de que la temperatura de la pletina portabloques es $(19,9 \pm 0,5) \text{ °C}$. Se indica que la máxima desviación de Δ es $0,5 \text{ °C}$ y representa la amplitud de una variación aproximadamente cíclica de la temperatura, debida a un sistema termostático. La variación cíclica de temperatura da lugar a una distribución en forma de U (arco seno) [GUM: 1995, H.1.3.4].

9.5.2.8.2 Interpretación

Asígnese a Δ una distribución arco seno $U(a, b)$ (véase el apartado 6.4.6), con límites:

$$a = -0,5 \text{ °C}, \quad b = 0,5 \text{ °C}.$$

NOTA No existe información sobre la fiabilidad de los límites por lo que se asigna una distribución en U con los límites exactamente conocidos. Como en la nota de 9.5.2.6.2, tal información puede haber sido omitida de la descripción de la GUM.

9.5.2.9 Diferencia $\delta\alpha$ entre los coeficientes de dilatación

9.5.2.9.1 Información

Los límites estimados para la variabilidad de $\delta\alpha$ son $\pm 1 \times 10^{-6} \text{ °C}^{-1}$, con la misma probabilidad de que $\delta\alpha$ adopte cualquier valor comprendido entre ellos [GUM: 1995, H.1.3.5]. La fiabilidad de estos límites es del 10 %, lo que da lugar a $v(u(\hat{\delta\alpha})) = 50$ [GUM: 1995, H.1.6].

9.5.2.9.2 Interpretación

Asígnese a $\delta\alpha$ una distribución rectangular de límites no establecidos con exactitud (véase el apartado 6.4.3), con:

$$a = -1,0 \times 10^{-6} \text{ °C}^{-1}, \quad b = 1,0 \times 10^{-6} \text{ °C}^{-1}, \quad d = 0,1 \times 10^{-6} \text{ °C}^{-1}.$$

La fiabilidad apuntada del 10 % sobre los límites proporciona la base para el valor de d .

9.5.2.10 Diferencia $\delta\theta$ de temperaturas

9.5.2.10.1 Información

Es esperable que el bloque de referencia y el bloque en calibración se encuentren a la misma temperatura, pero la diferencia de temperaturas $\delta\theta$ puede encontrarse con la misma probabilidad en cualquier posición dentro del intervalo $-0,05 \text{ °C}$ a $0,05 \text{ °C}$ [GUM: 1995, H.1.3.6]. Se cree que esta diferencia tiene una fiabilidad de un 50 %, dando lugar a $v(u(\hat{\delta\theta})) = 2$ [GUM: 1995, H.1.6].

9.5.2.10.2 Interpretación

Asígnese a $\delta\theta$ una distribución rectangular de límites no establecidos con exactitud (véase el apartado 6.4.3), con:

$$a = -0,050 \text{ °C}, \quad b = 0,050 \text{ °C}, \quad d = 0,025 \text{ °C}.$$

La fiabilidad apuntada del 50 % sobre los límites proporciona la base para el valor de d .

9.5.3 Propagación y resumen

9.5.3.1 El enfoque GUM sobre la incertidumbre

El enfoque GUM sobre la incertidumbre se basa en:

- una aproximación en serie de Taylor de primer orden al modelo (36) o (37),
- la utilización de la fórmula de Welch-Satterthwaite para evaluar un número efectivo de grados de libertad (redondeando a la baja) asociado a la incertidumbre obtenida tras la aplicación de la ley de propagación de la incertidumbre,
- la asignación a la magnitud de salida, de una distribución t de Student, con el anterior número de grados de libertad.

9.5.3.2 Método de Monte Carlo

La aplicación del MMC

- requiere el muestreo a partir de una distribución rectangular (véanse los apartados 6.4.2.4 y C.3.3), una distribución gaussiana (véanse los apartados 6.4.7.4 y C.4), una distribución t (véanse los apartados 6.4.9.5 y C.6), una distribución U (véase el apartado 6.4.6.4) y una distribución rectangular con límites no conocidos con exactitud (véase el apartado 6.4.3.4),
- aplicar el MMC adaptable (véase el apartado 7.9) con una tolerancia numérica ($\delta = 0,5$) establecida para obtener $n_{\text{dig}} = 2$ cifras decimales significativas en la incertidumbre típica.

9.5.4 Resultados

9.5.4.1 La tabla 11 muestra los resultados obtenidos para el modelo aproximado (37) al utilizar la información resumida en la tabla 10. La Figura 17 muestra las FDP para δL obtenidas tras la aplicación del enfoque GUM sobre la incertidumbre (curva sólida) y del MMC (histograma de frecuencias). La distribución obtenida por el enfoque GUM es una distribución t con $\nu = 16$ grados de libertad. Los límites del menor intervalo de cobertura del 99 % para δL obtenido de las FDP, indicado por líneas verticales, son visualmente indistinguibles.

9.5.4.2 Con el procedimiento adaptable de Monte Carlo se realizaron $1,26 \times 10^6$ reiteraciones. Los cálculos se realizaron también para una probabilidad de cobertura del 95 %, realizándose en este caso $0,53 \times 10^6$ reiteraciones.

Tabla 11 — Resultados obtenidos para el modelo aproximado (37) utilizando la información resumida en la tabla 10 (9.5.4.1, 9.5.4.3)

Método	$\hat{\delta L}$ (nm)	$u(\hat{\delta L})$ (nm)	Mínimo intervalo del 99 % para δL (nm)
EGUM	838	32	[745, 931]
MMC	838	36	[745, 932]

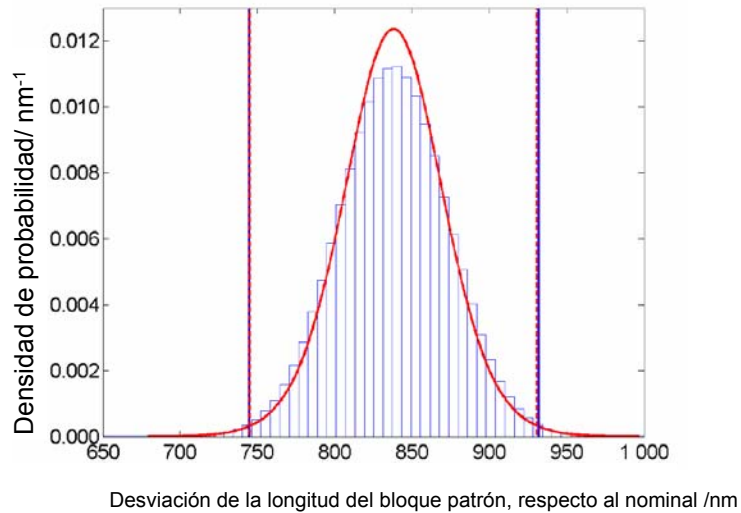


Figura 17 — FDP para δL obtenidas utilizando el enfoque GUM sobre la incertidumbre (campana de línea continua) y el MMC (histograma de frecuencias) para el modelo aproximado (37), empleando la información resumida en la tabla 10 (9.5.4.1)

9.5.4.3 Los resultados obtenidos para el modelo no lineal (36) son idénticos a los resultados de la tabla 11 para el número de cifras decimales en ella dados.

9.5.4.4 Existen algunas pequeñas diferencias en los resultados obtenidos. La $u(\hat{\delta L})$ resultó 4 nm mayor al aplicar el MMC que al aplicar el enfoque GUM. La longitud del intervalo de cobertura del 99 % para δL resultó 1 nm mayor.

Estos resultados se aplican igualmente a los modelos no lineales y a los aproximados. Dependiendo de la forma en que vayan a utilizarse los resultados, se decidirá si tales diferencias son importantes o no.

Anexo A

Perspectiva histórica

A.1 La GUM es un documento completo que cubre muchos aspectos de la evaluación de la incertidumbre. Aunque no cita expresamente el uso del método de Monte Carlo, éste fue reconocido durante la elaboración de la GUM. El borrador de ISO, IEC, OIML y BIPM de junio de 1992 (primera edición), realizado por el grupo de trabajo ISO/TAG 4/WG 3, establece [G.1.5]:

Si la relación entre Y y sus magnitudes de entrada no es lineal, o si los valores disponibles para los parámetros que caracterizan las probabilidades de las X_i (esperanza matemática, varianza, momentos de orden superior) son estimadores caracterizados a su vez por distribuciones de probabilidad, y un desarrollo en serie de Taylor de primer orden de la relación no es una aproximación aceptable, entonces la distribución de Y no se puede expresar como una convolución. En este caso se requerirá una aproximación numérica (como el cálculo de Monte Carlo) y la evaluación será más difícil desde el punto de vista del tratamiento informático.

A.2 En la versión publicada de la GUM, este apartado ha sido modificado como sigue:

Si la relación funcional entre Y y sus magnitudes de entrada es no lineal y un desarrollo en serie de Taylor de primer orden de dicha relación no es una aproximación aceptable (véanse los apartados 5.1.2 y 5.1.5), entonces la distribución de probabilidad de Y no puede obtenerse mediante la convolución de las distribuciones de las magnitudes de entrada. En tales casos se requieren otros métodos analíticos o numéricos.

A.3 La interpretación de la modificación anterior es que bajo “otros métodos analíticos o numéricos” queda incluida cualquier otra aproximación apropiada. Esta interpretación coincide con la del *National Institute of Standards and Technology* (NIST) de los Estados Unidos de América [50]:

[6.6] La política del NIST menciona las siguientes excepciones (véase el anexo C):

Se entiende que cualquier método estadístico válido que esté justificado técnicamente de acuerdo con las circunstancias existentes, puede utilizarse para determinar el equivalente a u_i , u_c ó U . Además, se reconoce que los acuerdos internacionales, nacionales o contractuales en los que el NIST sea parte, pueden requerir ocasionalmente desviaciones respecto a la política del NIST. En ambos casos, la información sobre la incertidumbre debe documentarse incluyendo qué se ha hecho y por qué.

Anexo B

Coeficientes de sensibilidad y balance de incertidumbres

B.1 Ni la propagación de distribuciones ni su implementación usando el método de Monte Carlo proporcionan coeficientes de sensibilidad [GUM: 1995, 5.1.3]. Sin embargo, sustituyendo todas las magnitudes de entrada menos una por sus mejores estimaciones, el MMC se puede utilizar para proporcionar la FDP para la magnitud de salida del modelo, teniendo sólo esa magnitud de entrada como variable [8]. La razón entre la desviación típica de los valores del modelo resultante (cf. 7.6) y la incertidumbre típica asociada a la mejor estimación de la magnitud de entrada en cuestión, puede tomarse como coeficiente de sensibilidad. Esta razón corresponde a la que se obtendría al tomar términos de orden superior en el desarrollo en serie de Taylor del modelo en consideración. Esta aproximación puede considerarse como una generalización de la fórmula aproximada por derivadas parciales de la GUM [GUM: 1995, 5.1.3 nota 2]. Tanto los coeficientes de sensibilidad como las contribuciones de cada magnitud de entrada a la incertidumbre asociada a la estimación de la magnitud de salida, diferirán en general de aquellos obtenidos con la GUM.

B.2 En muchos contextos metrológicos es una práctica habitual hacer una lista de las componentes de incertidumbre $u_i(y) = |c_i| u(x_i)$, $i = 1, \dots, N$, donde c_i es el coeficiente i -ésimo de sensibilidad y $u(x_i)$ la incertidumbre típica asociada a la i -ésima estimación de entrada x_i , que contribuye a la incertidumbre típica $u(y)$. Normalmente estas componentes se presentan en una tabla denominada "balance de incertidumbres". Esta práctica puede ser útil para identificar los términos dominantes que contribuyen a la $u(y)$ asociada a la estimación de la magnitud de salida. Sin embargo, en casos para los que (una implementación válida de) la propagación de distribuciones es más apropiada, el balance de incertidumbres debe considerarse como una herramienta cualitativa.

Anexo C

Muestreo a partir de distribuciones de probabilidad

C.1 Generalidades

C.1.1 Este anexo proporciona información técnica referente al muestreo a partir de distribuciones de probabilidad. Dicho muestreo constituye una parte fundamental del uso del método de Monte Carlo como implementación de la propagación de distribuciones. Pueden también consultarse bibliotecas digitales de funciones matemáticas [38] o repositorios de software relevante [37].

C.1.2 Un generador para cualquier distribución, como las distribuciones consideradas en el apartado 6.4 (véase también la tabla 1), pueden obtenerse en principio a partir de su función de distribución, junto con el uso de un generador para la distribución rectangular, como se indica en el apartado C.2. En el apartado C.3.3 se proporciona un generador para una distribución rectangular. Para algunas distribuciones, tales como la distribución gaussiana y la distribución t , resulta más eficiente usar generadores desarrollados específicamente, tales como los proporcionados en este anexo. El apartado 6.4 también asesora sobre el muestreo a partir de distribuciones de probabilidad.

NOTA Se pueden usar generadores distintos de los proporcionados en este anexo. Su calidad estadística ha de ser comprobada antes de su uso. Para generadores de número pseudoaleatorios para la distribución rectangular existe un método de comprobación. Véase el apartado C.3.2.

C.2 Distribuciones generales

Puede obtenerse una extracción de cualquier función de distribución $G_X(\xi)$ continua, estrictamente creciente, de una única variable, por transformación de una extracción de una distribución rectangular:

- a) genere un número aleatorio ρ a partir de una distribución rectangular $R(0, 1)$;
- b) determínese ξ de forma que cumpla $G_X(\xi) = \rho$.

NOTA 1 La inversión requerida en el paso b), que es hacer $\xi = G_X^{-1}(\rho)$, puede ser posible de forma analítica. Si no, puede realizarse numéricamente.

EJEMPLO Como ejemplo de inversión analítica, considérese la FDP exponencial para X , donde X tiene por esperanza matemática x (> 0), a saber, $g_X(\xi) = \exp(-\xi / x) / x$, para $\xi \geq 0$, y cero en el resto de los casos (véase el apartado 6.4.10). Entonces, por integración, $G_X(\xi) = 1 - \exp(-\xi / x)$, para $\xi \geq 0$, y cero en el resto de los casos. Por consiguiente, $\xi = -x \ln(1-\rho)$. Este resultado se puede simplificar ligeramente al utilizar el hecho de que si una variable Q tiene la distribución rectangular $R(0, 1)$, entonces también la tiene $1 - Q$. Como consecuencia, $\xi = -x \ln \rho$.

NOTA 2 Numéricamente, por lo general, ξ puede determinarse al resolver el problema del “cero de una función” $G_X(\xi) - \rho = 0$. Normalmente los límites superior e inferior de ξ se encuentran fácilmente, en cuyo caso puede emplearse un algoritmo iterativo dicotómico (*bracketing*) reconocido, tal como la bisección o, más eficientemente, una combinación de interpolación lineal y bisección [11], para determinar ξ .

NOTA 3 Si el generador de números pseudoaleatorios para la distribución rectangular va a ser utilizado como base para generar números a partir de otra distribución, la obtención de un valor de ρ igual a cero o uno puede causar un fallo en ese generador. Un ejemplo de esto es la distribución exponencial (véase el apartado 6.4.10). Su FDP (expresión (9)) no está definida para ρ igual a cero o uno. El uso del generador dado en el apartado C.3.3 no daría lugar a un error de ese tipo.

C.3 Distribución rectangular

C.3.1 Generalidades

C.3.1.1 La capacidad de generar números pseudoaleatorios a partir de una distribución rectangular es fundamental en sí misma y también como base para la generación de números pseudoaleatorios a partir de cualquier distribución, utilizando cualquier algoritmo o fórmula (véanse los apartados C.2, C.4 y C.6). En la última consideración, la calidad de los números generados a partir de una distribución no rectangular depende del generador de números a partir de una distribución rectangular y de las propiedades del algoritmo empleado. Por tanto, es de esperar que la calidad de los números generados a partir de una distribución no rectangular esté relacionada con aquellos generados a partir de una distribución rectangular. Solamente de un generador capaz de proporcionar fielmente números distribuidos de forma rectangular, junto con un buen algoritmo, es esperable que sea un generador que proporcione fielmente números distribuidos no rectangularmente.

C.3.1.2 Por lo tanto, es importante que el método subyacente de generación de números distribuidos rectangularmente sea robusto [31]. Un generador no debe utilizarse hasta que haya sido adecuadamente ensayado, a menos que el usuario esté seguro de su origen. De otra forma, se obtendrían resultados erróneos. Se recomienda el uso de un test de comprobación [30]. En el apartado C.3.3 se proporciona un método para generar números distribuidos rectangularmente, que ha demostrado funcionar bien frente a estos test y cuya implementación es directa.

C.3.1.3 La tabla C.1 define aspectos relevantes del funcionamiento de un procedimiento para generar números pseudoaleatorios para la distribución rectangular $R(0, 1)$, especificando los parámetros de entrada, de entrada-salida y de salida asociados con su determinación.

NOTA 1 Estableciendo como semillas en la tabla C.1 las utilizadas previamente, se puede generar la misma secuencia de números aleatorios. Hacer esto es importante como parte de la verificación de la regresión obtenida por el software, utilizada para comprobar la consistencia de los resultados obtenidos utilizando este software con aquellos de versiones previas.

NOTA 2 Algunos generadores de números pseudoaleatorios proporcionan un único valor tras cada petición y otros generadores varios.

Tabla C.1 — Generación de números pseudoaleatorios a partir de una distribución rectangular (C.3.1.3, C.3.2.2)

Parámetro de entrada	
q	Cantidad de números pseudoaleatorios a generar.
Parámetro de entrada-salida	
t	Vector columna de parámetros, algunos de los cuales pueden ser requeridos como magnitudes de entrada, que pueden cambiarse como parte de la programación. Los valores subsiguientes de estos parámetros no suelen ser causa de preocupación inmediata para el usuario. Los parámetros son necesarios para ayudar a controlar el proceso por el que se generan los números pseudoaleatorios. Los parámetros pueden definirse como variables globales y, por lo tanto, no aparecer explícitamente como parámetros del procedimiento. Uno o más de estos parámetros pueden ser semillas, utilizadas para iniciar la secuencia de números aleatorios producidos por sucesivas peticiones al procedimiento.
Parámetro de salida	
z	Vector columna de q extracciones de la distribución rectangular $R(0, 1)$.

C.3.1.4 Un número pseudoaleatorio x extraído de $R(a, b)$ viene dado por $a + (b - a)z$, donde z es un número pseudoaleatorio extraído de $R(0, 1)$.

C.3.2 Test de aleatoriedad

C.3.2.1 Cualquier generador de números pseudoaleatorios que se emplee debe:

- a) tener buenas propiedades estadísticas,
- b) poder ser implementado con facilidad en cualquier lenguaje de programación,
- c) proporcionar los mismos resultados para la misma semilla en cualquier ordenador.

También es deseable que sea compacto, de modo que su implementación sea directa. Un generador que se acerca al cumplimiento de estos requisitos es el de Wichmann y Hill [52, 53]. Se ha utilizado en muchas áreas incluyendo los cálculos de incertidumbre por ordenador. Sin embargo, el tamaño de su ciclo (cantidad de números aleatorios generados antes de que la secuencia se repita) es 2^{31} , considerado hoy en día inadecuado para algunos problemas. Asimismo, sus propiedades estadísticas no superaron todos los test [35]. Además, el generador se diseñó para ordenadores de 16 bits, mientras que hoy los ordenadores utilizados casi universalmente son de 32 y 64 bits.

NOTA El periodo de la secuencia de números producidos por un generador de números pseudoaleatorios es la cantidad de números consecutivos de la secuencia antes de que éstos se repitan.

C.3.2.2 Un test amplio de las propiedades estadísticas de cualquier generador se puede realizar mediante el conjunto de test TestU01 [30]. Este conjunto es muy detallado, contiene muchos test individuales, incluyendo el llamado "Big Crush". Wichmann y Hill [54] enumeran varios generadores que superan el test Big Crush. Un generador Wichmann-Hill mejorado (véase el apartado C.3.3) también supera el test y tiene las siguientes propiedades [54]:

- a) su implantación es directa en cualquier lenguaje de programación. No depende de la manipulación de bits utilizada por algunos generadores,
- b) el estado (la cantidad de información conservada por el generador entre peticiones al mismo) es reducido y fácil de manejar (véase el parámetro t en la tabla C.1),
- c) puede utilizarse fácilmente para proporcionar múltiples secuencias necesarias para aplicaciones muy similares, probablemente una característica de los cálculos de incertidumbre futuros,
- d) existen variantes del generador para ordenadores de 32 y 64 bits.

C.3.3 Procedimiento para generar números pseudoaleatorios a partir de una distribución rectangular

C.3.3.1 Al igual que el generador anterior, el generador mejorado de Wichmann-Hill es una combinación de generadores congruentes. El nuevo generador combina cuatro de tales generadores, mientras que la versión anterior combinaba tres. El nuevo generador tiene un periodo de 2^{121} , aceptable para cualquier aplicación que se pueda concebir.

C.3.3.2 La tabla C.2 define el generador mejorado de Wichmann-Hill para obtener números pseudoaleatorios de $R(0, 1)$ para un ordenador de 32 bits.

Tabla C.2 — El generador mejorado de Wichmann-Hill para números pseudoaleatorios (C.3.3.2, C.3.3.3) de una distribución rectangular en el intervalo (0, 1) para ordenadores de 32 bits. $[\omega]$ es el mayor entero no superior a ω . El resto de la división de i_j entre b_j es $i_j \bmod b_j$

Parámetro de entrada	
Ninguno	
Parámetro de entrada-salida	
$i_1,$ $i_2,$ $i_3,$ i_4	Parámetros enteros requeridos como magnitudes de entrada y que cambian durante el proceso. Fijar como enteros entre 1 y 2 147 483 647 antes de la primera petición. No intervenir entre peticiones. Los valores subsiguientes de estos parámetros no suelen ser causa de preocupación para el usuario. Los parámetros proporcionan la base para la generación de los números pseudoaleatorios. Pueden definirse como variables globales y por lo tanto no aparecer explícitamente como parámetros del proceso.
Constante	
$\mathbf{a},$ $\mathbf{b},$ $\mathbf{c},$ \mathbf{d}	Vectores de constantes enteras de dimensión 1×4 , donde $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_4)$, etc., dados por: $\mathbf{a} = (11\ 600, 47\ 003, 23\ 000, 33\ 000),$ $\mathbf{b} = (185\ 127, 45\ 688, 93\ 368, 65\ 075),$ $\mathbf{c} = (10\ 379, 10\ 479, 19\ 423, 8\ 123),$ $\mathbf{d} = 2\ 147\ 483\ 123 \times (1, 1, 1, 1) + (456, 420, 300, 0).$ No intervenir entre peticiones.
Parámetro de salida	
r	Número pseudoaleatorio extraído de $R(0, 1)$.
Programación	
a) Para $j = 1, \dots, 4$: i) Calcular $i_j = a_j \times (i_j \bmod b_j) - c_j \times \lfloor i_j/b_j \rfloor$ ii) Si $i_j < 0$, reemplazar i_j por $i_j + d_j$ b) Calcular $\omega = \sum_{j=1}^4 i_j/d_j$ c) Calcular $r = \omega - \lfloor \omega \rfloor$	

C.3.3.3 Para ordenadores de 64 bits, en el generador de la tabla C.2, el paso a) de la programación, incluyendo (i) y (ii), se reemplaza por el paso más sencillo:

a) Para $j = 1, \dots, 4$, calcular $i_j = (a_j \times i_j) \bmod d_j$.

C.4 Distribución gaussiana

El procedimiento de la tabla C.3 proporciona extracciones de la distribución gaussiana normalizada $N(0, 1)$ utilizando la transformación Box-Muller [3]. Una extracción de la distribución gaussiana $N(\mu, \sigma^2)$ viene dada por $\mu + \sigma z$, donde z es una extracción obtenida de $N(0, 1)$.

Tabla C.3 — El generador Box-Muller de números pseudoaleatorios gaussianos. (C.4)

Parámetro de entrada	
Ninguno	
Parámetro de salida	
$z_1,$ z_2	Dos extracciones obtenidas de forma independiente a partir de una distribución gaussiana normalizada
Programación	
a) Generar independientemente las extracciones aleatorias r_1 y r_2 a partir de la distribución rectangular $R(0, 1)$ b) Calcular $z_1 = \sqrt{-2 \ln r_1} \cos 2\pi r_2$ y $z_2 = \sqrt{-2 \ln r_1} \sin 2\pi r_2$	

C.5 Distribución gaussiana multivariante

C.5.1 La distribución multivariante más importante es la distribución gaussiana multivariante (o conjunta) $N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$, donde $\boldsymbol{\mu}$ es un vector de esperanzas matemáticas, de dimensión $n \times 1$, y \mathbf{V} una matriz de covarianzas de dimensión $n \times n$.

C.5.2 Las extracciones a partir de $N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$ [45, 49] se pueden obtener utilizando el procedimiento de la tabla C.4.

NOTA 1 Si \mathbf{V} está definida como positiva (esto es, todos sus autovalores son estrictamente positivos) el factor de Cholesky \mathbf{R} es único [23, página 204].

NOTA 2 Si \mathbf{V} no está definida como positiva, quizás debido a errores numéricos de redondeo o a otras causas, \mathbf{R} puede no existir. Además, en aquellos casos en que uno o más de los autovalores de \mathbf{V} sean muy pequeños (pero positivos), la implantación del software del algoritmo de factorización de Cholesky utilizado puede no ser capaz de calcular \mathbf{R} debido a los efectos de errores de coma flotante. En cualquiera de estas situaciones se recomienda que se “repare” \mathbf{V} , es decir, que se haga un cambio lo más pequeño posible en \mathbf{V} de forma que el factor de Cholesky \mathbf{R} para la matriz modificada esté bien definido. El factor resultante es exacto para una matriz de covarianza que numéricamente es cercana a la \mathbf{V} original. Existe para este fin un procedimiento de reparación sencillo [49, página 322] integrado en el generador MULTNORM [45].

NOTA 3 Si \mathbf{V} está definida como semipositiva, se puede calcular la descomposición propia $\mathbf{V} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{Q}^T$, donde \mathbf{Q} es una matriz ortogonal y $\boldsymbol{\Lambda}$ una matriz diagonal. Entonces se puede utilizar $\boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \mathbf{Q}^T$ para obtener extracciones a partir de $N(\mathbf{0}, \mathbf{V})$, incluso si \mathbf{V} tiene determinante cero.

Tabla C.4 — Un generador de números aleatorios gaussianos multivariantes (C.5.2)

Parámetro de entrada	
n	Dimensión de la distribución multivariante gaussiana.
$\boldsymbol{\mu}$	Vector de esperanzas matemáticas, de dimensión $n \times 1$.
\mathbf{V}	Matriz de covarianzas, de dimensión $n \times n$.
q	Cantidad de números pseudoaleatorios gaussianos multivariantes a generar.
Parámetro de salida	
\mathbf{X}	Matriz de dimensión $n \times q$, cuya columna j -ésima es una extracción de la distribución gaussiana multivariante
Programación	
a) Calcular el factor de Cholesky \mathbf{R} de \mathbf{V} , es decir la matriz triangular superior que cumpla $\mathbf{V} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$. (Para generar q números pseudoaleatorios es necesario realizar esta factorización matricial sólo una vez.) b) Generar una matriz \mathbf{Z} de variables gaussianas normalizadas, de dimensión $n \times q$. c) Calcular:	
$\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} \mathbf{1}^T + \mathbf{R}^T \mathbf{Z},$	
donde $\mathbf{1}$ representa un vector de unos, de dimensión $q \times 1$.	

C.5.3 La Figura C.1 muestra 200 puntos generados utilizando el generador MULTNORM [45] a partir de $N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$, donde:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 2,0 \\ 3,0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 2,0 & 1,9 \\ 1,9 & 2,0 \end{bmatrix},$$

en las que las dos magnitudes implicadas están correlacionadas positivamente. Existen otros generadores parecidos [12].

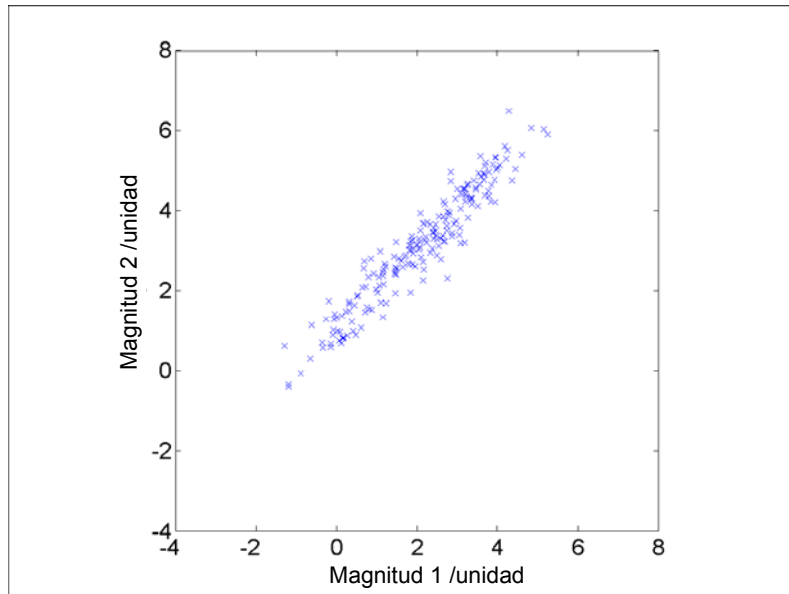


Figura C.1 — Puntos muestreados a partir de una distribución gaussiana de dos variables con correlación positiva (C.5.3, C.5.4)

C.5.4 En la Figura C.1, los puntos forman una elipse inclinada y alargada. Si los elementos que están fuera de la diagonal principal de V se reemplazaran por ceros, los puntos formarían un círculo. Si los elementos de la diagonal principal se hiciesen distintos entre sí y los elementos fuera de ésta siguieran siendo cero, los puntos formarían una elipse cuyos ejes serían paralelos a los ejes de la gráfica. Si los elementos de la diagonal principal fueran negativos y, por lo tanto, las magnitudes implicadas estuvieran correlacionadas negativamente, el eje mayor de la elipse tendría una pendiente negativa en lugar de positiva.

C.6 Distribución t

El procedimiento de la tabla C.5 proporciona un método [29], [44, página 63] para obtener extracciones a partir de la distribución t con ν grados de libertad.

Tabla C.5 — Un generador de números pseudoaleatorios a partir de la distribución t (C.6)

Parámetro de entrada	
ν	Grados de libertad
Parámetro de salida	
t	Extracción a partir de una distribución t con ν grados de libertad
Programación	
a) Generar dos extracciones aleatorias independientes r_1 y r_2 a partir de la distribución rectangular $R(0, 1)$ b) Si $r_1 < 1/2$, calcular $t = 1/(4r_1 - 1)$ y $v = r_2 / t^2$; en otro caso, calcular $t = 4r_1 - 3$ y $v = r_2$ c) Si $v < 1 - t /2$ ó $v < (1 + t^2 / \nu)^{-1/2}$, aceptar t como extracción de la distribución t ; en otro caso, repetir desde el paso a)	

NOTA Para que la desviación típica de la distribución t con ν grados de libertad sea finita, ν debe ser superior a dos.

Anexo D

Aproximación continua a la función de distribución para la magnitud de salida

D.1 A veces es útil trabajar con una aproximación continua $\tilde{G}_Y(\eta)$ a la función de distribución para la magnitud de salida Y , más que con la representación discreta G del apartado 7.5.

NOTA Trabajar con una aproximación continua supone, por ejemplo, que:

- el muestreo a partir de la función de distribución puede llevarse a cabo sin la necesidad de redondeo, como en el caso discreto,
- los métodos numéricos que requieren continuidad para su funcionamiento se pueden utilizar para determinar el menor intervalo de cobertura.

D.2 Para formar $\tilde{G}_Y(\eta)$, téngase en cuenta la representación discreta $G = \{y_{(r)}, r = 1, \dots, M\}$ de $G_Y(\eta)$ del apartado 7.5.1, después de reemplazar los valores $y_{(r)}$ repetidos del modelo, según sea necesario (paso b) de dicho párrafo). A continuación, realícense los siguientes pasos:

- asignar las probabilidades acumuladas uniformemente espaciadas $p_r = (r - 1/2)/M$, $r = 1, \dots, M$, a los $y_{(r)}$ [8]. Los valores numéricos p_r , $r = 1, \dots, M$, son los puntos medios de los M intervalos de probabilidad contiguos de amplitud $1/M$ entre cero y la unidad;
- formar $\tilde{G}_Y(\eta)$ como la función lineal (continua) estrictamente creciente definida a trozos que une los M puntos $(y_{(r)}, p_r)$, $r = 1, \dots, M$:

$$\tilde{G}_Y(\eta) = \frac{r - 1/2}{M} + \frac{\eta - y_{(r)}}{M(y_{(r+1)} - y_{(r)})}, \quad y_{(r)} \leq \eta \leq y_{(r+1)}, \quad r = 1, \dots, M - 1. \quad (D.1)$$

NOTA La expresión (D.1) proporciona una base conveniente para el muestreo desde $\tilde{G}_Y(\eta)$ a los efectos de una etapa posterior en la evaluación de la incertidumbre. Véase el apartado C.2 para el muestreo inverso desde una función de distribución. Algunos paquetes y bibliotecas de software proporcionan herramientas para la interpolación lineal a trozos. Dado que $\tilde{G}_Y(\eta)$ es lineal definida a trozos, también lo es su inversa, y dichas herramientas se pueden aplicar fácilmente.

D.3 La Figura D.1 ilustra $\tilde{G}_Y(\eta)$ obtenida utilizando el MMC basado en $M = 50$ valores muestreados de una FDP gaussiana $g_Y(\eta)$, teniendo Y una esperanza matemática de 3 y una desviación típica de 1.

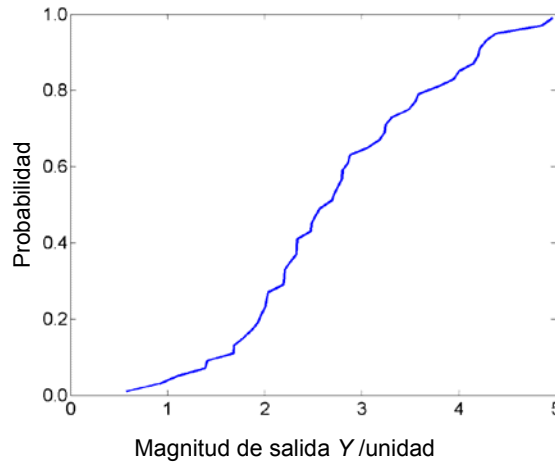


Figura D.1 — Aproximación $\tilde{G}_Y(\eta)$ a la función de distribución $G_Y(\eta)$ (D.3). “Unidad” denota cualquier unidad

D.4 Considérese $\tilde{g}_Y(\eta) = \tilde{G}'_Y(\eta)$, donde $\tilde{G}_Y(\eta)$ viene dada en la expresión (D.1). La función $\tilde{g}_Y(\eta)$ es constante y definida a trozos, con puntos de salto en $\eta = y_{(1)}, \dots, y_{(M)}$. La esperanza matemática \tilde{y} y la desviación típica $u(\tilde{y})$ de Y , descritas por $\tilde{g}_Y(\eta)$ se toman respectivamente, como una estimación de Y y como la incertidumbre típica asociada a dicha estimación. Las expresiones de \tilde{y} y $u(\tilde{y})$ vienen dadas por:

$$\tilde{y} = \frac{1}{M} \sum_{r=1}^M y_{(r)} \quad (D.2)$$

y

$$u^2(\tilde{y}) = \frac{1}{M} \left(\sum_{r=1}^M y_{(r)}^2 - \frac{1}{6} \sum_{r=1}^{M-1} (y_{(r+1)} - y_{(r)})^2 \right), \quad (D.3)$$

donde las dobles comillas en el símbolo de sumatorio indican que el primer y el último término de la suma deben tomarse con peso 1/2.

NOTA Para un valor numérico suficientemente grande de M (por ejemplo, 10^5 o mayor), los valores de \tilde{y} y $u(\tilde{y})$ obtenidos mediante las expresiones dadas en (D.2) y (D.3) serían generalmente, a efectos prácticos, indistinguibles de los proporcionados por las expresiones (16) y (17), respectivamente.

D.5 Sea α cualquier valor entre cero y $1 - p$, donde p es la probabilidad de cobertura requerida (por ejemplo, 0,95). Los extremos de un intervalo de cobertura del 100p % se pueden obtener de $\tilde{G}_Y(\eta)$ por interpolación lineal inversa. Para determinar el límite inferior y_{inf} tal que $\alpha = \tilde{G}_Y(y_{\text{inf}})$, identificar el índice r para el que los puntos $(y_{(r)}, p_r)$ e $(y_{(r+1)}, p_{r+1})$ satisfacen:

$$p_r \leq \alpha < p_{r+1}.$$

Entonces, por interpolación lineal inversa,

$$y_{\text{inf}} = y_{(r)} + (y_{(r+1)} - y_{(r)}) \frac{\alpha - p_r}{p_{r+1} - p_r}.$$

Análogamente, el límite superior y_{sup} determinado de tal forma que $p + \alpha = \tilde{G}_Y(y_{\text{sup}})$ se calcula a partir de

$$y_{\text{sup}} = y_{(s)} + (y_{(s+1)} - y_{(s)}) \frac{p + \alpha - p_s}{p_{s+1} - p_s},$$

donde el índice s es tal que los puntos $(y_{(s)}, p_s)$ e $(y_{(s+1)}, p_{s+1})$ satisfacen:

$$p_s \leq p + \alpha < p_{s+1}.$$

D.6 La elección de $\alpha = 0,025$ proporciona el intervalo de cobertura definido por los cuantiles 0,025 y 0,975. Esta opción proporciona el intervalo de cobertura con probabilidad simétrica del 95 % para Y .

D.7 El menor intervalo de cobertura se puede obtener generalmente desde $\tilde{G}_Y(\eta)$ determinando un α tal que $\tilde{G}_Y^{-1}(p + \alpha) - \tilde{G}_Y^{-1}(\alpha) = H(\alpha)$ sea un mínimo. Una aproximación numérica directa para determinar el mínimo es evaluar $H(\alpha)$ para un gran número de opciones $\{\alpha_k\}$ uniformemente espaciadas, para α entre cero y $1 - p$, y elegir α_i del conjunto $\{\alpha_k\}$ tal que produzca el mínimo del conjunto $\{H(\alpha_k)\}$.

D.8 El cálculo del intervalo de cobertura es más sencillo si pM es un entero. Entonces, el valor numérico de α para que $H(\alpha)$ sea mínimo, es igual a r^*/M , donde r^* es el índice r para el que la amplitud del intervalo $y_{(r+pM)} - y_{(r)}$, para $r = 1, \dots, (1-p)M$, es la menor.

Anexo E

Intervalo de confianza para la convolución de cuarto orden de una distribución rectangular

E.1 La solución analítica:

$$\pm 2\sqrt{3} \left[2 - (3/5)^{1/4} \right] \approx \pm 3,88 \quad (\text{E.1})$$

se obtuvo en 9.2.3.2. Constituye los límites del intervalo de cobertura simétrico para una probabilidad del 95 % de la magnitud de salida Y en un modelo aditivo con cuatro magnitudes de entrada, con esperanza matemática cero y desviaciones típicas igual a la unidad, cuyas FDP son distribuciones rectangulares idénticas. El resultado se demuestra en este anexo.

E.2 La distribución rectangular $R(a, b)$ (véase el apartado 6.4.2) toma el valor constante $(b - a)^{-1}$ para $a \leq \rho \leq b$ y cero en el resto. La convolución de orden n de $R(0, 1)$ es la *spline* $B_n(\rho)$ de orden n (grado $n-1$) con nodos $0, \dots, n$ [46]. Una expresión explícita es [6]:

$$B_n(\rho) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{r=0}^n {}^n C_r (-1)^r (\rho - r)_+^{n-1},$$

donde

$${}^n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad z_+ = \max(z, 0).$$

En particular,

$$B_4(\rho) = \frac{1}{6} \rho^3, \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

(con diferentes expresiones de polinomios cúbicos para $B_4(\rho)$ en otros intervalos entre nodos adyacentes), por tanto:

$$\int_0^1 B_4(\rho) d\rho = \left[\frac{1}{24} \rho^4 \right]_0^1 = \frac{1}{24} \approx 0,0417.$$

E.3 El extremo izquierdo y_{inf} del intervalo de cobertura simétrico para una probabilidad del 95 %, se encuentra entre cero y uno, ya que:

$$0,025 = \frac{1}{40} < \frac{1}{24}$$

del área bajo la FDP a la izquierda de y_{inf} , que por lo tanto está dado por:

$$\int_0^{y_{\text{inf}}} B_4(\rho) d\rho = \frac{1}{24} y_{\text{inf}}^4 = \frac{1}{40},$$

es decir,

$$y_{\text{inf}} = (3/5)^{1/4}.$$

Por simetría, el extremo derecho es:

$$y_{\text{sup}} = 4 - (3/5)^{1/4}.$$

Con lo que el intervalo de cobertura simétrico para una probabilidad del 95 % es:

$$\left[(3/5)^{1/4}; 4 - (3/5)^{1/4} \right] \equiv 2 \pm \left(2 - (3/5)^{1/4} \right).$$

El intervalo de cobertura correspondiente a la convolución de cuarto orden de la FDP rectangular $R(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ (con esperanza matemática cero y desviación típica uno) se calcula desplazando este resultado dos unidades y multiplicándolo por $2\sqrt{3}$ unidades, llegando a la expresión (E.1).

Anexo F

El problema de la pérdida por comparación

Este anexo se ocupa de algunos detalles del problema de la pérdida por comparación (véase el apartado 9.4). El apartado F.1 proporciona la esperanza matemática y la desviación típica de δY (véase el apartado 9.4.2.1.2). En el apartado F.2 se calcula de forma analítica la FDP para δY cuando $x_1 = x_2 = r(x_1, x_2) = 0$ (véase el apartado 9.4.2.1.2). En el apartado F.3 se aplica el enfoque GUM para magnitudes de entrada con y sin correlación (véanse los apartados 9.4.2.1.3. y 9.4.3.1.1).

F.1 Obtención analítica de la esperanza matemática y de la desviación típica

F.1.1. La varianza de una magnitud X puede expresarse en función de las esperanzas matemáticas como [42, página 124]:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

De este modo,

$$E(X^2) = [E(X)]^2 + V(X) = x^2 + u^2(x)$$

donde x es la mejor estimación de X y $u(x)$ la incertidumbre típica asociada a x . De este modo, para el modelo (28), $\delta Y = 1 - Y = X_1^2 + X_2^2$,

$$\delta y = E(\delta Y) = x_1^2 + x_2^2 + u^2(x_1) + u^2(x_2).$$

Este resultado se aplica:

- sin tener en cuenta la FDP asignada a X_1 y X_2 ,
- tanto si X_1 y X_2 son independientes o no.

F.1.2 La incertidumbre típica asociada a δy puede obtenerse de:

$$u^2(\delta y) = u^2(x_1^2) + u^2(x_2^2) + 2u(x_1^2, x_2^2),$$

donde para $i = 1$ e $i = 2$, $u^2(x_i^2) = V(X_i^2)$ y $u^2(x_1^2, x_2^2) = \text{Cov}(X_1^2, X_2^2)$. Por tanto, aplicando el Teorema de Price para distribuciones gaussianas [40, 41],

$$u^2(\delta y) = 4u^2(x_1)x_1^2 + 4u^2(x_2)x_2^2 + 2u^4(x_1) + 2u^4(x_2) + 4u^2(x_1, x_2) + 8u(x_1, x_2)x_1x_2 \quad (\text{F.1})$$

Cuando $x_2 = 0$ y $u(x_2) = u(x_1)$, y reemplazando $u(x_1, x_2)$ por $r(x_1, x_2)u^2(x_1)$,

$$u(\delta y) = 2\{x_1^2 + [1 + r^2(x_1, x_2)]u^2(x_1)\}^{1/2} u(x_1).$$

F.1.3 Cuando X_1 y X_2 no están correlacionas, es decir $r(x_1, x_2) = 0$, la expresión (F.1) se transforma en:

$$u^2(\delta y) = 4u^2(x_1)x_1^2 + 4u^2(x_2)x_2^2 + 2u^4(x_1) + 2u^4(x_2). \quad (\text{F.2})$$

La ecuación (F.2) puede comprobarse aplicando la fórmula (10) de la GUM [GUM: 1995, 5.1.2] y la que le sigue [GUM: 1995, 5.1.2 nota].

F.2 Solución analítica para una estimación igual a cero del coeficiente de reflexión de tensión con una covarianza asociada cero

F.2.1 Para el caso $x_1 = x_2 = r(x_1, x_2) = 0$ y $u(x_1) = u(x_2)$, la FDP $g_Y(\eta)$ para Y puede obtenerse analíticamente. Es importante disponer de esta solución para realizar validaciones posteriores. En las circunstancias anteriores,

$$\delta Y = u^2(x_1) \left[\frac{X_1^2}{u^2(x_1)} + \frac{X_2^2}{u^2(x_2)} \right].$$

F.2.2 El término entre corchetes es la suma, Z , de los cuadrados de dos magnitudes independientes cada una de la cuales sigue una FDP gaussiana. Por tanto, la suma sigue una distribución chi-cuadrado con dos grados de libertad [42, pág. 177], por tanto:

$$\delta Y = u^2(x_1) Z,$$

donde Z sigue la FDP

$$g_Z(z) = \chi_2^2(z) = e^{-z/2}/2.$$

F.2.3 La aplicación de la fórmula general [42, pág. 57-61] para la FDP $g_Y(\eta)$ de una función derivable y estrictamente decreciente de una variable (Z en este caso) con una FDP específica lleva a:

$$g_Y(\eta) = \frac{1}{u^2(x_1)} \chi_2^2\left(\frac{\eta}{u^2(x_1)}\right) = \frac{1}{2u^2(x_1)} \exp\left(-\frac{\eta}{2u^2(x_1)}\right), \quad \eta \geq 0.$$

F.2.4 La esperanza matemática de δY viene dada por:

$$\delta y = E(\delta Y) = \int_0^\infty \eta g_Y(\eta) d\eta = 2u^2(x_1)$$

y la varianza

$$u^2(\delta y) = V(\delta Y) = \int_0^\infty (\eta - y)^2 g_Y(\eta) d\eta = 4u^4(x_1),$$

es decir, la desviación típica es $2u^2(x_1)$, lo que resulta consistente con F.1.

F.2.5 La función de distribución correspondiente se obtiene integrando:

$$G_Y(\eta) = 1 - \exp\left(-\frac{\eta}{2u^2(x_1)}\right), \quad \eta \geq 0 \quad (\text{F.3})$$

F.2.6 Si δy_α es η en la ecuación (F.3) correspondiente a $G_Y(\eta) = \alpha$ para cualquier α tal que $0 \leq \alpha \leq 1 - p$, entonces:

$$\delta y_\alpha = -2u^2(x_1) \ln(1 - \alpha)$$

y el intervalo de cobertura con una probabilidad del 100p % para δY (véase el apartado 7.7) es:

$$[\delta y_\alpha; \delta y_{p+\alpha}] = [-2u^2(x_1) \ln(1 - \alpha); -2u^2(x_1) \ln(1 - p - \alpha)] \quad (\text{F.4})$$

con amplitud

$$H(\alpha) = -2u^2(x_1) \ln\left(1 - \frac{p}{1 - \alpha}\right).$$

F.2.7 El menor intervalo de cobertura con una probabilidad del 100p % viene dado calculando el valor de α que hace mínima $H(\alpha)$ (véase el apartado 5.3.4). Como $H(\alpha)$ es una función monótona creciente de α para $0 \leq \alpha \leq 1 - p$, $H(\alpha)$ es mínima para $\alpha = 0$. Por tanto, el menor intervalo de cobertura para δY con una probabilidad del 100p % es:

$$[0; -2u^2(x_1) \ln(1 - p)].$$

Para $u(x_1) = 0,005$, el menor intervalo de cobertura con una probabilidad del 95 % es:

$$[0; 0,000 149 8].$$

F.2.8 El intervalo de cobertura simétrico para δY con una probabilidad del 95 % viene dado tomando $\alpha = (1 - p)/2$ (véase el apartado 5.3.3):

$$[-2u^2(x_1) \ln(0,975); -2u^2(x_1) \ln(0,025)] = [0,000 001 3; 0,000 184 4],$$

que es un 20 % mayor que el menor intervalo de cobertura para una probabilidad del 95 %.

NOTA El análisis anterior es indicativo de una aproximación analítica que podría aplicarse a algunos problemas de este tipo. En este caso particular, los resultados podrían haberse obtenido más directamente, ya que $g_Y(\eta)$ es estrictamente creciente y el menor intervalo de cobertura se encuentra siempre en la zona de mayor densidad.

F.3 Enfoque GUM aplicado al problema de la pérdida por comparación

F.3.1 Magnitudes de entrada no correlacionadas

F.3.1.1 El problema de la pérdida por comparación considerado en el apartado 9.4 tiene como modelo de medición:

$$\delta Y = f(\mathbf{X}) = f(X_1, X_2) = X_1^2 + X_2^2,$$

donde X_1 y X_2 tienen asignadas unas FDP gaussianas con esperanzas matemáticas x_1 y x_2 y varianzas $u^2(x_1)$ y $u^2(x_2)$ respectivamente.

F.3.1.2 La aplicación del apartado 5.1.1 de la GUM proporciona:

$$\delta y = x_1^2 + x_2^2,$$

como estimación de δY . Las únicas derivadas parciales no triviales y no nulas son, para $i = 1, 2$,

$$\frac{\partial f}{\partial X_i} = 2X_i, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial X_i^2} = 2.$$

F.3.1.3 Por tanto, aplicando el apartado 5.1.2 de la GUM se obtiene, para la incertidumbre típica $u(\delta y)$:

$$u^2(\delta y) = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial X_1} \right)^2 u^2(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2} \right)^2 u^2(x_2) \right] \Bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}} = 4x_1^2 u^2(x_1) + 4x_2^2 u^2(x_2), \quad (\text{F.5})$$

basado en un desarrollo en serie de Taylor de primer orden de $f(\mathbf{X})$. Si la falta de linealidad de f es significativa [GUM: 1995, 5.1.2 nota], el término:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2} \right] \Bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}} u^2(x_1) u^2(x_2)$$

debe añadirse a la ecuación (F.5), en cuyo caso (F.5) se transforma en:

$$u^2(\delta y) = 4x_1^2 u^2(x_1) + 4x_2^2 u^2(x_2) + 4u^2(x_1) u^2(x_2). \quad (\text{F.6})$$

F.3.1.4 Un intervalo de cobertura del 95 % para δY viene dado por:

$$\delta y \pm 2u(\delta y)$$

debido a que δY sigue una FDP gaussiana.

F.3.2 Magnitudes de entrada correlacionadas

F.3.2.1 Cuando las magnitudes de entrada están correlacionadas, la matriz de incertidumbres asociada a las mejores estimaciones de las magnitudes de entrada viene dada en la ecuación (27).

F.3.2.2 Aplicando el apartado 5.2.2 de la GUM se obtiene:

$$u^2(\delta y) = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial X_1} \right)^2 u^2(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2} \right)^2 u^2(x_2) + 2 \frac{\partial f}{\partial X_1} \frac{\partial f}{\partial X_2} r(x_1, x_2) u(x_1) u(x_2) \right] \Bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}} \\ = 4x_1^2 u^2(x_1) + 4x_2^2 u^2(x_2) + 8r(x_1, x_2) x_1 x_2 u(x_1) u(x_2).$$

Anexo G

Glosario de los símbolos principales

A	variable aleatoria que representa el límite inferior de una distribución rectangular con límites establecidos sin exactitud
a	extremo inferior del intervalo en el que se sabe que se encuentra una variable aleatoria
a	punto medio del intervalo en el que se sabe que se encuentra el límite inferior A de una distribución rectangular con límites establecidos sin exactitud
B	variable aleatoria que representa el límite superior de una distribución rectangular con límites establecidos sin exactitud
b	extremo superior del intervalo en el que se sabe que se encuentra una variable aleatoria
b	punto medio del intervalo en el que se sabe que se encuentra el límite superior B de una distribución rectangular con límites establecidos sin exactitud
$C\text{Trap}(a, b, d)$	distribución rectangular con límites establecidos sin exactitud (distribución trapezoidal curvilínea) con parámetros a , b y d
$\text{Cov}(X_i, X_j)$	covarianza entre dos variables aleatorias X_i y X_j
c	número entero con n_{dig} cifras decimales significativas
c_i	coeficiente de sensibilidad i -ésimo, obtenido como derivada parcial del modelo f de medición con respecto a la i -ésima magnitud de entrada X_i , evaluada para la estimación vectorial \mathbf{x} de la magnitud de entrada vectorial \mathbf{X}
d	semiamplitud de los intervalos en los que se sabe que se encuentran los límites inferior A y superior B de una distribución rectangular con límites establecidos sin poca exactitud
d_{sup}	valor absoluto de la diferencia entre los extremos derechos de los intervalos de cobertura proporcionados por el enfoque GUM y por el método de Monte Carlo
d_{inf}	valor absoluto de la diferencia entre los extremos izquierdos de los intervalos de cobertura proporcionados por el enfoque GUM y por el método de Monte Carlo
e	base de los logaritmos naturales
$E(X)$	esperanza matemática de una variable aleatoria X
$E(\mathbf{X})$	esperanza matemática de una variable aleatoria vectorial \mathbf{X}
$E(X^r)$	momento r -ésimo de una variable aleatoria X
$\text{Ex}(\lambda)$	distribución exponencial con parámetro λ
f	modelo matemático de medición, expresado como relación funcional entre una magnitud de salida Y y las magnitudes de entrada X_1, \dots, X_N de las que depende Y
G	representación discreta de la función de distribución $G_Y(\tau)$ para la magnitud

	de salida Y de un procedimiento Monte Carlo
$G(\alpha, \beta)$	distribución gamma con parámetros α y β
$g_X(\xi)$	función de densidad de probabilidad con variable ξ para la magnitud de entrada X
$g_X(\xi)$	función de densidad de probabilidad conjunta (multivariante) con variable vectorial ξ para la magnitud vectorial de entrada X
$g_{X_i}(\xi_i)$	función de densidad de probabilidad con variable ξ_i para la magnitud de entrada X_i
$G_Y(\eta)$	función de distribución con variable η para la magnitud de salida Y
$\tilde{G}_Y(\eta)$	aproximación continua a la función de distribución $G_Y(\eta)$ para la magnitud de salida Y
$g_Y(\eta)$	función de densidad de probabilidad con variable η para la magnitud de salida Y
$\tilde{g}_Y(\eta)$	derivada de $\tilde{G}_Y(\eta)$ con respecto a η que proporciona una aproximación numérica a la función de densidad de probabilidad $g_Y(\eta)$ para la magnitud de salida Y
J	menor número entero, mayor o igual que $100 / (1 - p)$
k_p	factor de cobertura correspondiente a una probabilidad de cobertura p
l	exponente entero en la forma de presentación $c \times 10^l$ de un valor numérico, donde c es un número entero con n_{dig} cifras decimales significativas
M	número de reiteraciones de Monte Carlo
N	número de magnitudes de entrada X_1, \dots, X_N
$N(0, 1)$	distribución gaussiana normalizada
$N(\mu, \sigma^2)$	distribución gaussiana con parámetros μ y σ^2
$N(\mu, V)$	distribución gaussiana multivariante con parámetros μ y V
n	número de elementos (indicaciones o resultados) de una serie
n_{dig}	número de cifras decimales significativas consideradas como representativas en un valor numérico dado
$\text{Pr}(z)$	probabilidad del suceso z
p	probabilidad de cobertura
q	parte entera de $pM + 1/2$
q	número de elementos contados en una muestra de tamaño específico
R	matriz triangular superior
$R(0, 1)$	distribución rectangular normalizada en el intervalo $[0, 1]$
$R(a, b)$	distribución rectangular en el intervalo $[a, b]$
$r(x_i, x_j)$	coeficiente de correlación asociado a las estimaciones x_i y x_j de las magnitudes de entrada X_i y X_j
s	desviación típica de una serie de n indicaciones x_1, \dots, x_n
s_p	desviación típica conjunta obtenida de varias series de indicaciones

Suplemento 1 de la GUM, traducción al español 2010

T	superíndice que indica la transpuesta de una matriz
s_z	desviación típica asociada al promedio z de los valores $z^{(1)}, \dots, z^{(n)}$ en un procedimiento de Monte Carlo adaptable, donde z puede indicar una estimación y de la magnitud de salida Y , la desviación típica $u(y)$ asociada a y , o los límites izquierdo, y_{inf} , o derecho, y_{sup} , de un intervalo de cobertura para Y
$T(a, b)$	distribución triangular en el intervalo $[a, b]$
$\text{Trap}(a, b, \beta)$	distribución trapezoidal en el intervalo $[a, b]$ con parámetro β
t_ν	distribución t centrada con ν grados de libertad
$t_\nu(\mu, \sigma^2)$	distribución t con parámetros μ y σ^2 , y ν grados de libertad
$U(0, 1)$	distribución arco seno normalizada (tipo U) en el intervalo $[0, 1]$
$U(a, b)$	distribución arco seno (tipo U) en el intervalo $[a, b]$
U_p	incertidumbre expandida correspondiente a una probabilidad de cobertura p
\mathbf{U}_x	matriz de incertidumbre asociada a las estimaciones vectoriales \mathbf{x} de la magnitud de entrada vectorial \mathbf{X}
$\mathbf{u}(\mathbf{x})$	vector $(u(x_1), \dots, u(x_N))^T$ de incertidumbres típicas asociadas a la estimación vectorial \mathbf{x} de la magnitud de entrada vectorial \mathbf{X}
$u(x_i)$	incertidumbre típica asociada la estimación x_i de la magnitud de entrada X_i
$u(x_i, x_j)$	covarianza asociada a las estimaciones x_i y x_j de las magnitudes de entrada X_i y X_j
$u(y)$	incertidumbre típica asociada a la estimación y de la magnitud de salida Y
$u(\tilde{y})$	incertidumbre típica asociada a \tilde{y}
$u_c(y)$	incertidumbre típica combinada asociada al estimador y de la magnitud de salida Y
$u_i(y)$	i -ésima componente de incertidumbre de la incertidumbre típica $u(y)$ asociada a la estimación y de la magnitud de salida Y
\mathbf{V}	matriz de covarianzas (o de varianzas-covarianzas)
$V(X)$	varianza de una variable aleatoria X
$V(\mathbf{X})$	matriz de covarianzas para la variable aleatoria vectorial \mathbf{X}
ω	semiamplitud $(b - a) / 2$ de un intervalo $[a, b]$
X	magnitud de entrada, considerada como variable aleatoria
\mathbf{X}	vector $(X_1, \dots, X_N)^T$ de magnitudes de entrada, consideradas como variables aleatorias, de las que depende la magnitud de salida Y
X_i	i -ésima magnitud de entrada, considerada como variable aleatoria, de la que depende la magnitud de salida Y
x	estimación (esperanza matemática) de X
\mathbf{x}	vector de estimaciones (esperanza matemática vectorial) $(x_1, \dots, x_N)^T$ de \mathbf{X}
\bar{x}	promedio de una serie de n indicaciones x_1, \dots, x_n
x_i	estimación (esperanza matemática) de X_i
x_i	i -ésima indicación (o elemento) de una serie

$x_{i,r}$	r -ésima reiteración/extracción de Monte Carlo a partir de la función de densidad de probabilidad para X_i
\mathbf{x}_r	r -ésima reiteración/extracción de Monte Carlo, que contiene los valores $X_{1,r}, \dots, X_{N,r}$, extraídos de las funciones de densidad de probabilidad para las N magnitudes de entrada X_1, \dots, X_N o de la función de densidad de probabilidad conjunta para \mathbf{X}
Y	magnitud de salida (escalar), considerada como variable aleatoria
y	estimación (esperanza matemática) de Y
\tilde{y}	estimación de Y , obtenida como promedio a partir de los M valores y_r del modelo, en una simulación de Monte Carlo, o como la esperanza matemática de Y caracterizada por la función de densidad de probabilidad $\tilde{g}_Y(\eta)$
y_{sup}	límite derecho de un intervalo de cobertura para Y
y_{inf}	límite izquierdo de un intervalo de cobertura para Y
y_r	r -ésimo valor del modelo $f(\mathbf{x}_r)$
$y_{(r)}$	r -ésimo valor del modelo, después de ordenar los y_r valores en orden creciente
$\mathbf{z}^{(h)}$	h -ésimo valor en un procedimiento de Monte Carlo adaptable, donde z puede indicar una estimación y de la magnitud de salida Y , la desviación típica $u(y)$ asociada a y , o los límites izquierdo, y_{inf} , o derecho, y_{sup} , de un intervalo de cobertura para Y
α	valor de probabilidad
α	parámetro de una distribución gamma
β	parámetro de una distribución trapezoidal igual a la razón entre la semiamplitud de la parte superior del trapecio y la de la base
β	parámetro de una distribución gamma
$\Gamma(z)$	función gamma de variable z
δ	tolerancia numérica asociada a un valor numérico
$\delta(z)$	función delta de Dirac de variable z
η	variable que describe los valores posibles de la magnitud de salida Y
λ_1	semiamplitud de la parte superior del trapecio, para una distribución trapezoidal
λ_2	semiamplitud de la base del trapecio, para una distribución trapezoidal
μ	esperanza matemática de una magnitud caracterizada por una distribución de probabilidad
ν	grados de libertad de una distribución t o de una distribución chi-cuadrado
ν_{ef}	grados efectivos de libertad asociados a la incertidumbre típica $u(y)$
ν_p	grados de libertad asociados a una desviación típica conjunta s_p obtenida a partir de varias series de indicaciones
ξ	variable que describe los posibles valores de la variable aleatoria X
ξ	variable vectorial $(\xi_1, \dots, \xi_N)^T$ que describe los valores posibles de la magnitud de entrada vectorial \mathbf{X}

Suplemento 1 de la GUM, traducción al español 2010

ξ_i	variable que describe los valores posibles de la magnitud de entrada X_i
σ	desviación típica de una magnitud caracterizada por una distribución de probabilidad
σ^2	varianza (desviación típica al cuadrado) de una magnitud caracterizada por una distribución de probabilidad
Φ	fase de una magnitud que oscila sinusoidalmente
χ_ν^2	distribución chi-cuadrado con ν grados de libertad

Bibliografía

- [1] BEATTY, R. W. Insertion loss concepts. *Proc. IEEE* 52 (1964), 663–671.
- [2] BERTHOUEX, P. M. y BROWN, L. C. *Statistics for Environmental Engineers*. CRC Press, USA, 1994.
- [3] BOX, G. E. P. y MULLER, M. A note on the generation of random normal variates. *Ann. Math. Statist.* 29 (1958), 610–611.
- [4] CHAN, A., GOLUB, G. y LEVEQUE, R. Algorithms for computing the sample variance: analysis and recommendations. *Amer. Stat.* 37 (1983), 242–247.
- [5] CONTE, S. D. y DE BOOR, C. *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach*. McGraw-Hill, 1972.
- [6] COX, M. G. The numerical evaluation of B-splines. *J. Inst. Math. Appl.* 10 (1972), 134–149.
- [7] COX, M. G. y HARRIS, P. M. Software specifications for uncertainty evaluation. Tech. Rep. DEM-ES-010, National Physical Laboratory, Teddington, UK, 2006.
- [8] COX, M. G. y HARRIS, P. M. SSfM Best Practice Guide No. 6, Uncertainty evaluation. Tech. Rep. DEM-ES-011, National Physical Laboratory, Teddington, UK, 2006.
- [9] COX, M. G. y SIEBERT, B. R. L. The use of a Monte Carlo method for evaluating uncertainty and expanded uncertainty. *Metrologia* 43 (2006), S178–S188.
- [10] DAVID, H. A. *Order Statistics*. Wiley, New York, 1981.
- [11] DEKKER, T. J. Finding a zero by means of successive linear interpolation. In *Constructive Aspects of the Fundamental Theorem of Algebra* (London, 1969), B. Dejon and P. Henrici, Eds., Wiley Interscience.
- [12] DEVROYE, L. *Non-Uniform Random Number Generation*. Springer, New York, 1986.
- [13] DIETRICH, C. F. *Uncertainty, Calibration and Probability*. Adam Hilger, Bristol, UK, 1991.
- [14] DOWSON, D. C. y WRAGG, A. Maximum entropy distributions having prescribed first and second order moments. *IEEE Trans. IT* 19 (1973), 689–693.
- [15] EA. Expression of the uncertainty of measurement in calibration. Tech. Rep. EA-4/02, European Co-operation for Accreditation, 1999.
- [16] ELSTER, C. Calculation of uncertainty in the presence of prior knowledge. *Metrologia* 44 (2007), 111–116.
- [17] EURACHEM/CITAC. Quantifying uncertainty in analytical measurement. Tech. Rep. Guide CG4, EURACHEM/ CITEC, 2000. Second edition.
- [18] EVANS, M., HASTINGS, N. y PEACOCK, B. *Statistical distributions*. Wiley, 2000.
- [19] FRENKEL, R. B. Statistical background to the ISO 'Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement'. Tech. Rep. Monograph 2, NML Technology Transfer Series, Número de publicación TIP P1242, National Measurement Laboratory, CSIRO, Australia, 2002.
- [20] GELMAN, A., CARLIN, J. B., STERN, H. S. y RUBIN, D. B. *Bayesian Data Analysis*. Chapman and Hall, London, 2004.
- [21] GLEESER, L. J. Assessing uncertainty in measurement. *Stat. Sci.* 13 (1998), 277–290.
- [22] HALL, B. D. y WILLINK, R. Does “Welch-Satterthwaite” make a good uncertainty estimate?

Metrologia 38 (2001), 9–15.

- [23] HIGHAM, N. J. *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*. SIAM, Philadelphia, 1996.
- [24] ISO. ISO 3534-1. Statistics — Vocabulary and symbols — Part 1: Probability and general statistical terms. International Standards Organization, Geneva.
- [25] JAYNES, E. T. Information theory and statistical mechanics. *Phys. Rev* 106 (1957), 620–630.
- [26] JAYNES, E. T. Where do we stand on maximum entropy? In *Papers on Probability, Statistics, and Statistical Physics* (Dordrecht, The Netherlands, 1989), R. D. Rosenkrantz, Ed., Kluwer Academic, pp. 210–314. [<http://bayes.wustl.edu/etj/articles/stand.on.entropy.pdf>]
- [27] KACKER, R. y JONES, A. On use of Bayesian statistics to make the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement consistent. *Metrologia* 40 (2003), 235–248.
- [28] KERNS, D. M. y BEATTY, R. W. *Basic Theory of Waveguide Junctions and Introductory Microwave Network Analysis*. Pergamon Press, London, 1967.
- [29] KINDERMAN, A., MONAHAN, J. y RAMAGE, J. Computer methods for sampling from Student's t-distribution. *Math. Comput* 31 (1977), 1009–1018.
- [30] L'ECUYER, P. y SIMARD, R. TestU01: A software library in ANSI C for empirical testing of random number generators. [<http://www.iro.umontreal.ca/~simardr/testu01/tu01.html>]
- [31] LEYDOLD, J. Automatic sampling with the ratio-of-uniforms method. *ACM Trans. Math. Software* 26 (2000), 78–98.
- [32] LIRA, I. *Evaluating the Uncertainty of Measurement*. Fundamentals and Practical Guidance. Institute of Physics, Bristol, UK, 2002.
- [33] LIRA, I. H. y WÖGER, W. Bayesian evaluation of the standard uncertainty and coverage probability in a simple measurement model. *Meas. Sci. Technol.* 12 (2001), 1172–1179.
- [34] MATSUMOTO, M. y NISHIMURA, T. Mersenne Twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator. *ACM Trans. Modeling and Computer Simulation* 8 (1998), 3–30.
- [35] MCCULLOUGH, B. D. y WILSON, B. On the accuracy of statistical procedures in Microsoft Excel 2003. *Computational Statistics and Data Analysis* (2004).
- [36] MOLER, C. B. *Numerical computing with MATLAB*. SIAM, Philadelphia, 2004.
- [37] NETLIB. Netlib contiene software, documentos y bases de datos de acceso gratuito que son de interés para el cálculo numérico y científico, así como para otras comunidades, también contiene herramientas para muestrear a partir de distribuciones de probabilidad. [<http://www.netlib.org>].
- [38] NIST. La NIST Digital Library of Mathematical Functions contiene herramientas para muestrear a partir de distribuciones de probabilidad. [<http://dlmf.nist.gov>]
- [39] OIML. Conventional value of the result of weighing in air. Tech. Rep. OIML D 28, Organisation Internationale de Métrologie Légale, Paris, 2004.
- [40] PAPOULIS, A. On an extension of Price's theorem. *IEEE Trans. Inform. Theory* IT-11 (1965).
- [41] PRICE, R. A useful theorem for nonlinear devices having Gaussian inputs. *IEEE Trans. Inform. Theory* IT-4 (1958), 69–72.
- [42] RICE, J. R. *Mathematical Statistics and Data Analysis*, second ed. Duxbury Press, Belmont, Ca., USA, 1995.
- [43] RIDLER, N. M. y SALTER, M. J. Propagating S-parameter uncertainties to other measurement quantities. En *58th ARFTG (Automatic RF Techniques Group) Conference Digest* (2001).
- [44] ROBERT, C. P. y CASELLA, G. *Monte Carlo Statistical Methods*. Springer-Verlag, New York, 1999.

- [45] SALTER, M. J., RIDLER, N. M. y COX, M. G. Distribution of correlation coefficient for samples taken from a bivariate normal distribution. Tech. Rep. CETM 22, National Physical Laboratory, Teddington, UK, 2000.
- [46] SCHOENBERG, I. J. Cardinal interpolation and spline functions. *J. Approx. Theory* 2 (1969), 167–206.
- [47] SCOWEN, R. S. QUICKERSORT, Algorithm 271. *Comm. ACM* 8 (1965), 669.
- [48] SHANNON, C. E. A mathematical theory of information. *Bell Systems Tech. J.* 27 (1948), 623–656.
- [49] STRANG, G. y BORRE, K. *Linear Algebra, Geodesy and GPS*. Wiley, Wellesley-Cambridge Press, 1997.
- [50] TAYLOR, B. N. y KUYATT, C. E. Guidelines for evaluating and expressing the uncertainty of NIST measurement results. Tech. Rep. TN1297, National Institute of Standards and Technology, USA, 1994.
- [51] WEISE, K. y Wöger, W. A Bayesian theory of measurement uncertainty. *Meas. Sci. Technol.* 3 (1992), 1–11.
- [52] WICHMANN, B. A. y HILL, I. D. Algorithm AS183. An efficient and portable pseudo-random number generator. *Appl. Statist.* 31 (1982), 188–190.
- [53] WICHMANN, B. A. y HILL, I. D. Correction. algorithm AS183. An efficient and portable pseudo-random number generator. *Appl. Statist.* 33 (1984), 123.
- [54] WICHMANN, B. A. y HILL, I. D. Generating good pseudo-random numbers. *Computational Statistics and Data Analysis* 51 (2006), 1614–1622.
- [55] WILLINK, R. Coverage intervals and statistical coverage intervals. *Metrologia* 41 (2004), L5–L6.
- [56] WÖGER, W. Probability assignment to systematic deviations by the Principle of Maximum Entropy. *IEEE Trans. Instr. Measurement* IM-36 (1987), 655–658.

distribución en forma de U	véase	elemento de probabilidad	3.3
distribución arco seno			
distribución exponencial	6.4.10, 6.4.11.4, C.2	enfoque GUM sobre la incertidumbre (EGUM)	1, 3.18, 4.15, 5.1.2, 5.4.2, 5.6, 5.10.2, F.3
asignación a una magnitud	6.4.10.1	comparación con un método de Monte Carlo	5.11
esperanza matemática y varianza	6.4.10.3	condiciones para la aplicación en modelos no lineales	5.7
función de densidad de probabilidad	6.4.10.2	condiciones para la aplicación en modelos no lineales	5.8
muestreo	6.4.10.4	ejemplos	9.1–9.5
distribución normal	3.4	validación del	8.1, 9.1.2, 9.2.2.7, 9.2.3.4, 9.2.4.5, 9.3.2.6
distribución rectangular	6.4.2, 9.2.3, 9.2.4, C.2, E	con términos de orden superior	5.8.1, 8.1.2, 9.1.1, 9.3.2.1, 9.3.2.6, 9.4.2.1.3, 9.4.2.2.1
asignación a una magnitud	6.4.2.1, 9.3.1.4, 9.5.2.6.2	Erlang, distribución de	6.4.11.4
esperanza matemática y varianza	6.4.2.3	esperanza matemática	3.6, 4.1, 4.3, 4.8, 5.1.1, 5.3.1, 5.6.2, 5.6.3, 5.9.6, 6.4.1, 7.5.1, 7.6, 9.2.3.3, 9.3.1.4, 9.4.1.4, 9.4.1.8, 9.4.2.1.2, 9.4.2.2.7, 9.4.2.2.11, 9.4.2.3.2, 9.4.3.1.3, C.2, D.3, D.4, E.3, F.1.1, F.2.4, F.3.1.1
función de densidad de probabilidad	6.4.2.2	Estimación de la magnitud de salida a partir del método de Monte Carlo	7.6
muestreo	6.4.2.4, 9.1.4, C.3	estimación de la magnitud de salida	5.1.1, 5.3.1, 5.5.1, 5.11.4, 5.11.6, 9.4.2.2.7, B.2
distribución rectangular con límites inexactos	6.4.3	a partir del enfoque GUM sobre la incertidumbre	4.10, 5.6.2, 5.6.3, 9.4.2.1.3, 9.4.2.2.8, F.3.1.2
asignación a una magnitud	6.4.3.1, 9.5.2.9.2, 9.5.2.10.2	a partir del método de Monte Carlo	5.9.6, 7.9.4, 9.4.2.2.8, D.4
esperanza matemática y varianza	6.4.3.3	evaluación de la incertidumbre Tipo A y Tipo B	5.1.2, 5.11.2, 5.11.4, 6.1.3, 6.4.9.4
función de densidad de probabilidad	6.4.3.2		
muestreo	6.4.3.4		
distribución trapezoidal	6.4.4		
asignación a una magnitud	6.4.4.1		
esperanza matemática y varianza	6.4.4.3		
función de densidad de probabilidad	6.4.4.2		
muestreo	6.4.4.4		
distribución triangular	6.4.5		
asignación a una magnitud	6.4.5.1		
esperanza matemática y varianza	6.4.5.3		
función de densidad de probabilidad	6.4.5.2		
muestreo	6.4.5.4		
E			
EGUM	véase enfoque GUM sobre la incertidumbre (EGUM)		
F			
		factor de cobertura	5.3.3, 5.11.6, 6.4.9.7, 9.2.2.3, 9.2.4.4, 9.5.2.2.1
		fases de la evaluación de la incertidumbre	5.1.1, 5.6.1
		formulación	5.1.1, 5.1.3
		propagación	5.1.1, 5.1.3, 5.4, 5.4.3, 5.6.1, 5.6.3, 5.9

Suplemento 1 de la GUM, traducción al español 2010

resumen 5.1.1, 5.1.3, 5.3, 5.6.1, 5.6.3, 5.9

FDP véase función de densidad de probabilidad (PDF)

fiabilidad de la incertidumbre véase incertidumbre típica

formulación véase fases de la evaluación de la incertidumbre

función de densidad de probabilidad (PDF) 3.3, 4.2, 4.3, 4.15
 a la magnitud de salida D, 5.1.1, 5.2, 5.4.4, 5.6.2, 5.7.2, 5.11.2, 5.11.4, 7.2.1, 7.5.2, B.1
 a las magnitudes de entrada..5.1.1, 5.1.2, 5.4.4, 5.6.2, 5.11.2, 5.11.4, 6, 6.1.3, 6.1.5, 6.2–6.4, 7.3, 7.4.1, 7.6, 7.8.1
 asimétrica 5.3.4, 5.3.6
 conjunta 4.4, 4.5, 5.1.1, 6.1.2, 6.1.4, 6.4.8.2, 6.4.8.4, 7.3, 7.8.1, 9.4.1.8
 muestreo C, 7.3, 9.2.2.4
 simétrica 5.3.3, 5.3.5, 9.2.2.8

función de distribución 3.2, 4.2, 5.3.6, 6.5 para la magnitud de salida D, 5.2, 5.9.1, 5.11.4, 7.5, 9.3.2.3, 9.4.2.2.9

G

Gamma, distribución 6.4.11
 asignación a una magnitud 6.4.11.1
 esperanza matemática y varianza 6.4.11.3
 función de densidad de probabilidad. 6.4.11.2
 muestreo 6.4.11.4

gamma, función 3.5, 6.4.9.3

gaussiana, distribución 3.4, 5.6–5.8, 5.11.6, 6.4.7, 9.2.2, 9.4.1.8, 9.4.2.2.5, 9.4.2.3.2, D.3
 asignación a una magnitud 6.4.7.1, 9.3.1.4, 9.5.2.7.2, F.3.1.1
 esperanza matemática y varianza 6.4.7.3
 función de densidad de probabilidad. 3.4, 6.4.7.2
 muestreo 6.4.7.4, C.4

gaussiana, distribución multivariante. 6.4.8, 9.4.3.1.3
 asignación a una magnitud vectorial 6.4.8.1, 9.4.1.4
 esperanza matemática y matriz de covarianza 6.4.8.3
 función de densidad de probabilidad. 6.4.8.2
 muestreo 6.4.8.4, C.5

generador de números a partir de una distribución rectangular
 capacidad de C.3.1.1
 procedimiento C.3.3

grado de confianza 5.1.2

grados de libertad 3.5, 5.6.2, 5.6.3, 5.7.2, 5.11.5, 6.4.3.3, 6.4.9.2, 6.4.9.4, 6.4.9.5, 7.6, 9.5.2.4.2, 9.5.2.5.1, 9.5.4.1, C.6, F.2.2
 efectivos 5.6.3, 5.7.2, 5.11.6, 6.4.9.4, 6.4.9.7, 9.5.2.2.1, 9.5.3.1
 de una desviación típica 6.4.9.6

Guía para la expresión de la incertidumbre de medida (GUM) 2, 3, 4.15, 5.6.1, A

GUM véase Guía para la expresión de la incertidumbre de medida (GUM)

I

incertidumbre expandida 5.3.3, 5.6.3, 6.4.9.7, 9.5.2.2.1

incertidumbre mutua 3.11, 5.6.3

incertidumbre típica combinada 4.10

incertidumbre típica 4.10, 5.1.1, 5.1.2, 5.3.1, 5.5.1, 5.11.2, 5.11.5, 5.11.6, 8.1.3
 del enfoque GUM 5.6.2, 5.6.3
 del método de Monte Carlo 5.9.6, 7.6
 fiabilidad de la 6.4.9.4

indicaciones, análisis de una serie de 5.11.2, 6.1.3, 6.2.1, 6.2.2, 6.3.1, 6.4.9.2, 6.4.9.4, 6.4.9.6, 9.5.1.3, 9.5.2.3.1, 9.5.2.4.1

Suplemento 1 de la GUM, traducción al español 2010

propagación véase fases de la evaluación de la incertidumbre

propagación de distribuciones 3.17, 5.2, 5.4, 5.9.6

analítica 5.4.1, 9.4.2.1.1, 9.4.2.2.2
realización de 5.4

propagación de la incertidumbre 3.18, 4.9, 5.4.1, 5.6.2, 5.7.1, 5.8.1, 5.11.2, 5.11.6, 7.4.2, 8.1.2, 9.2.2.3, 9.3.1.3, 9.4.2.2.1, 9.4.2.2.8

R

resumen véase fases de la evaluación de la incertidumbre

S

sesgo 7.5.1, 9.4.2.4.1

T

teorema del límite central 5.7.2, 5.11.6, 9.2.4.5

test para evaluar la aleatoriedad 7.3, C.3.2.2

tolerancia numérica 3.20, 5.1.3, 7.2.1, 7.2.3, 7.9.1, 7.9.2, 7.9.4, 8.1.3, 8.2, 9.1.2, 9.2.2.3, 9.2.2.4, 9.2.2.7, 9.2.4.2, 9.2.4.5, 9.3.2.2, 9.3.2.6, 9.5.3.2

trapezoide curvilíneo véase distribución rectangular con límites inexactos

V

variable aleatoria 3.1, 4.1, 4.3, 5.6.3, 5.9.6, 6.2.1, 6.2.2, 7.9.4

varianza 3.7, 4.3, 5.3.1

VIM véase Vocabulario Internacional de términos fundamentales y generales de Metrología (VIM)

Vocabulario Internacional de términos fundamentales y generales de Metrología (VIM) 2, 3, 4.15

W

Welch-Satterthwaite, fórmula de 5.6.3, 5.7.2, 5.11.6, 6.4.9.4, 9.5.3.1

Este documento ha sido elaborado en papel Igloo offset (reciclado extra blanco Torras), libre de cloro.

El Centro Español de Metrología cumple, comprometido con el medio ambiente, su programa de Gestión Ambiental y lo dispuesto en el Plan de Contratación Pública Verde de la Administración del Estado (Orden PRE/116/2008)

El Centro Español de Metrología ha obtenido la certificación ISO 14001.





CENTRO ESPAÑOL DE METROLOGÍA

C/ Del Alfar, 2
28760 Tres Cantos
Madrid
ESPAÑA

Tel: 918074700

Fax: 91 8074807

Correo electrónico: cem@cem.es

Internet: <http://www.cem.es>

NIPO: 706 - 10 - 014 - 9

