Evaluación de datos de medición

Guía para la Expresión de la Incertidumbre de Medida

$$k\sqrt{A^2+B^2}$$

GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO DE INDUSTRIA, TURISMO Y COMERCIO
CEM
CENTRO ESPAÑOL DE METROLOGÍA

EDICIÓN DIGITAL 1 en español (traducción 1ª Ed. Sept. 2008)
Primera edición Septiembre 2008 (original en inglés)
Centro Español de Metrología

NIPO EDICIÓN DIGITAL 1: 706-10- 001- 0

JCGM 100: 2008

GUM 1995 con ligeras correcciones

Evaluación de datos de medición

Guía para la expresión de la incertidumbre de medida

EDICIÓN DIGITAL 1 en español (traducción 1ª Ed. Sept. 2008)
Primera edición Septiembre 2008 (original en inglés)
Centro Español de Metrología

Documento elaborado por el Grupo de Trabajo 1 del Comité Conjunto de Guías en Metrología (JCGM / WG 1).

Los derechos de autor de este documento son propiedad conjunta de las organizaciones miembros del JCGM (BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP y OIML).

Derechos de autor

Septiembre 2008

JCGM 100:2008

GUM 1995 con ligeras correcciones

Evaluación de datos de medición — Guía para la expresión de la incertidumbre de medida

EDICIÓN DIGITAL 1 en español (traducción 1ª ed. Sept. 2008)
Primera edición Septiembre 2008 (original en inglés)
Centro Español de Metrología

Índice

Preliminares

Esta *Guía* establece las reglas generales para la evaluación y expresión de la incertidumbre de medida destinada a ser aplicable a un amplio espectro de mediciones. La base de la *Guía* es la Recomendación 1 (CI-1981), del Comité Internacional de Pesas y Medidas (CIPM) y la Recomendación INC-1 (1980) del Grupo de Trabajo sobre la Expresión de las Incertidumbres. El Grupo de Trabajo fue convocado por la Oficina Internacional de Pesas y Medidas (BIPM) en respuesta a una petición del CIPM. La Recomendación del ClPM es la única recomendación relativa a la expresión de la incertidumbre de medida adoptada por una organización intergubernamental.

Esta *Guía* fue preparada por un grupo de trabajo mixto compuesto por expertos designados por el BIPM, la Comisión Electrotécnica Internacional (IEC), la Organización Internacional de Normalización (ISO), y la Organización Internacional de Metrología Legal (OIML).

Las siguientes siete organizaciones* apoyaron el desarrollo de esta *Guía*, que se publica en su nombre:

BIPM:	Oficina Internacional de Pesas y Medidas (Bureau International des Poids et Mesures)
IEC:	Comisión Electrotécnica Internacional
IFCC:	Federación Internacional de Química Clínica**
ISO:	Organización Internacional de Normalización
IUPAC:	Unión Internacional de Química Pura y Aplicada **
IUPAP:	Unión Internacional de Física Pura y Aplicada **
OlML:	Organización Internacional de Metrología Legal

Se invita a los usuarios de esta *Guía* a enviar sus comentarios y solicitudes de aclaración a cualquiera de las siete organizaciones, a las direcciones de correo que se dan en el interior de la cubierta ***.

* **Nota a la versión 2008**:
En 2005, la Cooperación Internacional de Acreditación de Laboratorios (ILAC) se unió oficialmente a las siete organizaciones internacionales fundadoras.

** **Nota a la versión 2008:**
Los nombres de estas tres organizaciones han cambiado desde 1995. Ahora son:
IFCC: Federación Internacional de Química Clínica y Medicina de Laboratorio
IUPAC: Organización Internacional de Química Pura y Aplicada
IUPAP: Organización Internacional de Física Pura y Aplicada.

*** **Nota a la versión 2008:**
Los enlaces a las direcciones de las ocho organizaciones que actualmente participan en el JCGM (Comité Mixto de Guías de Metrología) se dan en http://www.bipm.org/en/committees/jc/jcgm.

Prólogo

En 1977, reconociendo la falta de consenso internacional sobre la forma de expresar la incertidumbre de medida, la más alta autoridad mundial en metrología, el Comité Internacional de Pesas y Medidas (CIPM), pidió a la Oficina Internacional de Pesas y Medidas (BIPM) que abordara el problema junto con los laboratorios nacionales de metrología, y que hiciera una recomendación.

El BIPM preparó un cuestionario detallado, considerando todos los problemas, y lo difundió entre 32 laboratorios nacionales de metrología interesados en el tema (y para información, a cinco organizaciones internacionales). A principios de 1979, se recibieron las respuestas de 21 laboratorios [1].[1)] Casi todos eran partidarios de contar con un procedimiento aceptado internacionalmente para expresar la incertidumbre de medida y para combinar las componentes individuales de la incertidumbre en una única incertidumbre global. Sin embargo, no se alcanzó un consenso claro sobre el método que debía ser utilizado. Entonces, el BIPM convocó una reunión, con el propósito de llegar a un procedimiento uniforme y aceptado por la generalidad para la especificación de la incertidumbre; asistieron expertos de 11 laboratorios nacionales de metrología. Este Grupo de Trabajo sobre la Expresión de las Incertidumbres preparó la Recomendación INC-1 (1980), Expresión de las Incertidumbres Experimentales [2]. El CIPM aprobó la citada Recomendación en 1981 [3] y la refrendó en 1986 [4].[*]

La tarea de desarrollar una guía detallada basada en la Recomendación del Grupo de Trabajo (que es un escrito a grandes rasgos más que una prescripción detallada) fue encomendada por el CIPM a la Organización Internacional de Normalización (ISO) puesto que la ISO podía reflejar mucho mejor las necesidades procedentes de los amplios intereses de la industria y del comercio.

La responsabilidad fue asignada al Grupo Asesor Técnico en Metrología (TAG 4), dado que una de sus tareas es coordinar el desarrollo de las guías sobre temas relacionados con la medida, que son de interés común a ISO y a las seis organizaciones que participan junto con ISO en el trabajo del TAG 4: la Comisión Internacional Electrotécnica (IEC), colaboradora de ISO en la normalización a nivel mundial; el CIPM y la Organización Internacional de Metrología Legal (OIML), que son las dos organizaciones mundiales de metrología; la Unión Internacional de Química Pura y Aplicada (IUPAC) y la Unión Internacional de Física Pura y Aplicada (IUPAP), que representan a la Química y a la Física; y la Federación Internacional de Química Clínica (IFCC).

El TAG 4, a su vez, constituyó el Grupo de Trabajo 3 (ISO/TAG 4/WG 3), compuesto por expertos nominados por el BIPM, la IEC, la ISO y la OIML, y nombrados por el Presidente del TAG 4. A este grupo le fue asignado el cometido siguiente:

> Desarrollar una guía, basada en la recomendación del Grupo de Trabajo del BIPM sobre la Expresión de las Incertidumbres, que proporcionara reglas para la expresión de la incertidumbre de medida, útiles en normalización, calibración, acreditación de laboratorios y servicios de metrología;
>
> El objetivo de dicha guía es:
>
> - dar información completa de cómo obtener la expresión de la incertidumbre;
> - proporcionar una base para la comparación internacional de los resultados de las mediciones.

[1)] Véase la bibliografía.

[*] **Nota en la versión 2008:**
En la versión 2008 de la GUM, el JCGM/WG1 ha introducido solamente las necesarias correcciones sobre la versión impresa de 1995. Estas correcciones han sido hechas en los subapartados 4.2.2, 4.2.4, 5.1.2, B.2.17, C.3.2, C.3.4, E.4.3, H.4.3, H.5.2.5 y H.6.2.

0 Introducción

0.1 A la hora de expresar el resultado de una medición de una magnitud física, es obligado dar alguna indicación cuantitativa de la calidad del resultado, de forma que quienes utilizan dicho resultado puedan evaluar su idoneidad. Sin dicha indicación, las mediciones no pueden compararse entre sí, ni con otros valores de referencia dados en especificaciones o normas. Por ello es necesario establecer un procedimiento fácilmente comprensible y aceptado universalmente para caracterizar la calidad del resultado de una medición; esto es, para evaluar y expresar su *incertidumbre*.

0.2 El concepto de *incertidumbre* como atributo cuantificable es relativamente nuevo en la historia de la medición, a pesar de que conceptos como *error* y *análisis de errores* han formado parte desde hace mucho tiempo de la práctica de la ciencia de la medida o metrología. Actualmente está ampliamente reconocido que aún cuando se hayan considerado todas las componentes conocidas o sospechadas del error, y se hayan aplicado las correcciones oportunas, aún existe una incertidumbre asociada a la corrección del resultado final; esto es, una duda acerca de la bondad con que el resultado final representa al valor de la magnitud medida.

0.3 De la misma manera que la utilización casi universal del Sistema Internacional de Unidades (SI) ha dado coherencia a todas las mediciones científicas y tecnológicas, un consenso internacional sobre la evaluación y expresión de la incertidumbre de medida permitiría dar significado a una gran variedad de resultados de medida en los campos de la ciencia, la ingeniería, el comercio, la industria y la reglamentación, para que fueran fácilmente entendidos e interpretados adecuadamente. En esta era del mercado global, es imprescindible que el método de evaluación y expresión de la incertidumbre sea uniforme en todo el mundo, de manera que las mediciones realizadas en diferentes países puedan ser comparadas fácilmente.

0.4 El método ideal para evaluar y expresar la incertidumbre del resultado de una medición debe ser:

- *universal*: el método debe ser aplicable a toda clase de mediciones y a todo tipo de datos de entrada empleados en mediciones.

La magnitud utilizada para expresar la incertidumbre debe ser:

- *consistente internamente*: debe poder obtenerse directamente a partir de las componentes que contribuyen a ella, así como ser independiente de como estén agrupadas dichas componentes y de la descomposición de sus componentes en subcomponentes.

- *transferible*: debe ser posible utilizar directamente la incertidumbre obtenida para un resultado, como componente en la evaluación de la incertidumbre de otra medición en la que intervenga ese primer resultado.

Además, en muchas aplicaciones industriales y comerciales, así como en las áreas de la salud y de la seguridad, a menudo es necesario proporcionar un intervalo en torno al resultado de la medición, en el que se espera encontrar la mayor parte de valores de la distribución que pueden ser razonablemente atribuidos a la magnitud objeto de la medición. Por tanto, el método ideal para evaluar y expresar la incertidumbre de medida debería ser capaz de proporcionar fácilmente un intervalo, en particular, aquel con la probabilidad o el nivel de confianza que corresponda de manera realista con lo requerido.

0.5 El procedimiento seguido a grandes rasgos sobre el que está basada esta guía, se encuentra en la Recomendación INC-1 (1980) [2] del Grupo de Trabajo sobre la Expresión de las Incertidumbres, que fue convocado por el BIPM en respuesta a una petición del CIPM (véase Prólogo). Este procedimiento, cuya justificación se analiza en el Anexo E, satisface todos los requisitos señalados anteriormente. No es este el caso de la mayoría de otros métodos de uso habitual. La Recomendación INC-1 (1980) fue aprobada y ratificada por el CIPM en sus propias Recomendaciones 1 (CI-1981) [3] y 1 (CI-1986) [4]; las traducciones al español de ambas Recomendaciones CIPM se incluyen en el anexo A (véanse A.2 y A.3 respectivamente). Dado que la Recomendación INC -1 (1980) es la base sobre la que se apoya este documento, la traducción al español se incluye en el apartado 0.7, y el texto en francés, que es el legalmente autorizado, se reproduce en A.1.

0.6 Un breve sumario del procedimiento seguido en esta guía para evaluación y expresión de la incertidumbre de medida, se incluye en el apartado 8, y unos cuantos ejemplos se presentan con detalle en el Anexo H. Otros anexos se ocupan de los términos generales utilizados en metrología (Anexo B); términos y conceptos estadísticos básicos (Anexo C); valor "verdadero", error e incertidumbre (Anexo D); consejos prácticos para evaluar las componentes de la incertidumbre (Anexo F); grados de libertad y niveles de confianza (Anexo G); los principales símbolos matemáticos utilizados a lo largo del documento (Anexo J) y referencias bibliográficas (Bibliografía). El documento concluye con un índice alfabético.

0.7 **Recomendación INC-1 (1980)** Expresión de las incertidumbres experimentales

1. La incertidumbre de un resultado de medida consta generalmente de varias componentes, que pueden agruparse en dos tipos, según el modo en que se estime su valor numérico:
   A. aquellas que se evalúan por métodos estadísticos,
   B. aquellas que se evalúan por otros medios.

   No siempre existe una simple correspondencia entre la clasificación en tipo A y B, y la clasificación en "aleatoria" y "sistemática" utilizada anteriormente para incertidumbres. El término "incertidumbre sistemática" puede ser confuso y debe evitarse.

   Cualquier informe detallado de la incertidumbre debe incluir una lista completa de las componentes, especificando para cada una el método utilizado para obtener su valor numérico.

2. Las componentes de tipo A se expresan por medio de varianzas estimadas s_i^2(o las "desviaciones típicas" estimadas s_i) y el número de grados de libertad ν_i Cuando sea necesario, se darán las covarianzas.

3. Las componentes de tipo B deben expresarse por medio de varianzas estimadas u_j^2, que pueden considerarse como aproximaciones a las varianzas correspondientes, cuya existencia se supone. Las magnitudes uj^2 pueden tratarse como varianzas y las u_j como desviaciones típicas. Cuando sea necesario, las covarianzas deben ser tratadas de modo similar.

4. La incertidumbre combinada debe expresarse por el valor numérico obtenido al aplicar el método habitual de combinación de varianzas. La incertidumbre combinada y sus componentes deben expresarse en forma de "desviaciones típicas".

5. Si, en aplicaciones particulares, es necesario multiplicar la incertidumbre combinada por un factor para obtener una incertidumbre global, deberá especificarse siempre el factor multiplicador utilizado.

Evaluación de datos de medición — Guía para la expresión de la incertidumbre de medida

1 Alcance

1.1 Esta *Guía* establece reglas generales para evaluar y expresar la incertidumbre de medida, que pueden seguirse para los diversos niveles de exactitud requeridos y en diversos campos, desde el taller hasta la investigación. Por lo tanto, se pretende que los principios de esta *Guía* sean aplicables a un gran campo de mediciones, incluyendo aquellas necesarias para:

- mantener el control y el aseguramiento de la calidad en la producción;

- cumplir y hacer cumplir con leyes y reglamentos;

- conducir la investigación básica, y la investigación y el desarrollo aplicados en la ciencia y en la ingeniería;

- calibrar patrones e instrumentos y realizar ensayos dentro de un sistema nacional de medidas, con el fin de conseguir trazabilidad a patrones nacionales;

- desarrollar, mantener y comparar patrones de referencia físicos nacionales e internacionales, incluyendo materiales de referencia.

1.2 Esta *Guía* ante todo trata de la expresión de la incertidumbre de medida de una magnitud física bien definida, el mensurando, éste puede estar expresado esencialmente por un valor único. Si el fenómeno de interés puede estar representado solamente mediante una distribución de valores, o si depende de uno o más parámetros, como el tiempo, entonces los mensurandos necesarios para su descripción son el conjunto de magnitudes que describen esta distribución o esta dependencia.

1.3 Esta *Guía* es también aplicable a la estimación y expresión de la incertidumbre asociada al diseño conceptual y análisis teórico de experimentos, métodos de medida, y componentes y sistemas complejos. Dado que el resultado de medida y su incertidumbre pueden poseer naturaleza conceptual, estando basados por entero en datos hipotéticos, el término “resultado de medida” tal como se utiliza en esta *Guía* debe interpretarse en este sentido amplio.

1.4 Esta *Guía* proporciona reglas generales para evaluar y expresar la incertidumbre de medida, más que instrucciones detalladas y específicas, referidas a una técnica concreta. Además, no se ocupa de cómo utilizar la incertidumbre de un resultado de medida particular, una vez evaluada, para otros fines, por ejemplo, para obtener conclusiones acerca de la compatibilidad de dicho resultado con otros resultados similares, para establecer límites de tolerancia en un proceso de fabricación, o para decidir si determinada acción puede ejecutarse con seguridad. En consecuencia, puede ser necesario desarrollar normas particulares basadas en esta *Guía*, para ocuparse de problemas particulares en campos de medida específicos, o de las diversas utilizaciones de las expresiones cuantitativas de la incertidumbre.* Estas normas pueden ser versiones simplificadas de la presente *Guía*, pero deben incluir el grado de detalle apropiado al nivel de exactitud y complejidad de las mediciones y usos a que se destinan.

NOTA Puede haber situaciones en las que el concepto de incertidumbre de medida no se considere totalmente aplicable, como cuando se trata de determinar la exactitud de un método de ensayo (véase referencia [5], por ejemplo).

* **Nota de la versión 2008**:
Desde la primera publicación de esta Guía, varios documentos de aplicaciones generales y específicas de los documentos derivados de solicitudes de este documento se han publicado. A efectos de información, una recopilación no exhaustiva de estos documentos se pueden encontrar en http://www.bipm.org/en/committees/jc/jcgm/wg1_bibliography.html.

2 Definiciones

2.1 Términos metrológicos generales

Las definiciones de un determinado número de términos metrológicos generales, relevantes para esta *Guía*, tales como “magnitud medible”, “mensurando” y “error de medida” figuran en el Anexo B. Estas definiciones están tomadas del *Vocabulario Internacional de términos básicos y generales en Metrología* (abreviadamente VIM)* [6]. Además, el Anexo C da las definiciones de un número de términos estadísticos básicos tomados principalmente de la Norma Internacional ISO 3534-1 [7]. Cuando uno de estos términos metrológicos o estadísticos (o un término relacionado con ellos) se utiliza por primera vez en el texto, a partir del capítulo 3, aparece escrito en letra negrita y el número del párrafo en que aparece definido figura entre paréntesis.

Debido a su importancia en esta *Guía*, la definición del término metrológico general “incertidumbre de medida” figura tanto en el Anexo B como en el apartado 2.2.3. Las definiciones de los términos más importantes, específicos de esta *Guía*, se incluyen en los apartados 2.3.1. a 2.3.6. En todos estos apartados y en los Anexos B y C, el uso de los paréntesis en torno a determinados términos significa que estas palabras pueden omitirse, si ello no lleva a confusión.

2.2 El término “incertidumbre”

El concepto de incertidumbre se discute más adelante, en el capítulo 3 y en el Anexo D.

2.2.1 La palabra “incertidumbre” significa duda. Así, en su sentido más amplio, “incertidumbre de medida” significa duda sobre la validez del resultado de una medición. Como no se dispone de distintas palabras para este *concepto general* de incertidumbre y para las magnitudes específicas que proporcionan *medidas cuantitativas* del concepto, por ejemplo la desviación típica, es necesario utilizar la palabra “incertidumbre” en estos dos sentidos diferentes.

2.2.2 En esta *Guía*, la palabra “incertidumbre” sin adjetivos se refiere tanto al concepto general de incertidumbre como a cualquier expresión cuantitativa de una medida de dicho concepto. En el caso de mediciones específicas, se utilizarán los adjetivos apropiados.

2.2.3 La definición formal del término “incertidumbre de medida”, desarrollada para esta *Guía* y adoptada por el VIM [6] (VIM:1993, definición 3.9) es la siguiente:

incertidumbre (de medida)

parámetro asociado al resultado de una medición, que caracteriza la dispersión de los valores que podrían ser razonablemente atribuidos al mensurando.

NOTA 1 El parámetro puede ser, por ejemplo, una desviación típica (o un múltiplo de ella), o el semi amplitud de un intervalo con un nivel de confianza determinado.

NOTA 2 La incertidumbre de medida comprende, en general, varias componentes. Algunas pueden ser evaluadas a partir de la distribución estadística de los resultados de series de mediciones, y pueden caracterizarse por sus desviaciones típicas experimentales. Las otras componentes, que también pueden ser caracterizadas por desviaciones típicas, se evalúan asumiendo distribuciones de probabilidad, basadas en la experiencia adquirida o en otras informaciones.

NOTA 3 Se entiende que el resultado de la medición es la mejor estimación del valor del mensurando, y que todas las componentes de la incertidumbre, comprendidos los que provienen de efectos sistemáticos, tales como las componentes asociadas a las correcciones y a los patrones de referencia, contribuyen a la dispersión.

2.2.4 La definición de incertidumbre de medida dada en 2.2.3 es totalmente operativa y se centra en el resultado de medida y en su incertidumbre evaluada. No obstante, no es incompatible con otros conceptos de incertidumbre de medida, tales como:

---

* **Nota a la versión 2008**
La tercera edición del vocabulario se publicó en el año 2008 con el título JCGM 200:2008, *Vocabulario Internacional de Metrología - Conceptos fundamentales y generales, y términos asociados (VIM)* (3ª edición en español 2008).

- medida del error posible en el valor estimado del mensurando, proporcionado como resultado de una medición;

- estimación que expresa el campo de valores dentro del cual se halla el verdadero valor del mensurando (VIM: 1984, definición 3.09).

A pesar de que estas dos concepciones tradicionales son válidas en tanto que ideales, sin embargo se centran en magnitudes *desconocidas*: el "error" del resultado de una medición, y el "valor verdadero" del mensurando (en contraposición a su valor estimado), respectivamente. No obstante, cualquiera que sea el *concepto* de incertidumbre que se adopte, una componente de incertidumbre debe *evaluarse* siempre utilizando los mismos datos y la información asociada. (Véase también E.5).

2.3 Términos específicos de esta Guía

En general, los términos específicos de esta *Guía* se definen en el texto siempre que aparecen por primera vez. No obstante, las definiciones de los términos más importantes se dan a continuación, a modo de fácil referencia.

NOTA Una discusión más amplia relacionada con estos términos puede encontrarse más adelante, en los apartados indicados: para 2.3.2, véanse 3.3.3 y 4.2; para 2.3.3, véanse 3.3.3 y 4.3; para 2.3.4, véanse capítulo 5 y ecuaciones (10) y (13); y para 2.3.5 y 2.3.6, véase capítulo 6.

2.3.1 incertidumbre típica

incertidumbre del resultado de una medición, expresada en forma de desviación típica

2.3.2 evaluación Tipo A (de incertidumbre)

método de evaluación de la incertidumbre mediante análisis estadístico de series de observaciones

2.3.3 evaluación Tipo B (de incertidumbre)

método de evaluación de la incertidumbre por medios distintos al análisis estadístico de series de observaciones

2.3.4 incertidumbre típica combinada

incertidumbre típica del resultado de una medición, cuando el resultado se obtiene a partir de los valores de otras magnitudes, igual a la raíz cuadrada positiva de una suma de términos, siendo éstos las varianzas o covarianzas de esas otras magnitudes, ponderadas en función de la variación del resultado de medida con la variación de dichas magnitudes

2.3.5 incertidumbre expandida

magnitud que define un intervalo en torno al resultado de una medición, y en el que se espera encontrar una fracción importante de la distribución de valores que podrían ser atribuidos razonablemente al mensurando

NOTA 1 La fracción puede entenderse como la probabilidad o el nivel de confianza del intervalo.

NOTA 2 Para asociar un nivel específico de confianza a un intervalo definido por la incertidumbre expandida, se requieren hipótesis explícitas o implícitas sobre la distribución de probabilidad representada por el resultado de medida y su incertidumbre típica combinada. El nivel de confianza que puede atribuirse a este intervalo posee la misma validez que las hipótesis realizadas.

NOTA 3 La incertidumbre expandida se denomina *incertidumbre global* en el apartado 5 de la Recomendación INC-1 (1980).

2.3.6 factor de cobertura

factor numérico utilizado como multiplicador de la incertidumbre típica combinada, para obtener la incertidumbre expandida

NOTA Un factor de cobertura k típico, toma valores comprendidos entre 2 y 3.

3 Conceptos básicos

Una presentación adicional sobre conceptos básicos, basada en las ideas de valor "verdadero", error e incertidumbre, incluyendo ilustraciones gráficas acerca de estos conceptos, puede encontrarse en el Anexo D; asimismo, el Anexo E explora la motivación y la base estadística para la Recomendación INC-1 (1980) sobre la que se asienta la presente *Guía*. El Anexo J es una lista de los principales símbolos matemáticos utilizados a lo largo de la *Guía*.

3.1 Medición

3.1.1 El objetivo de una **medición** (B.2.5) es determinar el **valor** (B.2.2) del **mensurando** (B.2.9); esto es, el valor de la **magnitud particular** (B.2.1, nota 1) bajo medición. Por tanto, una medición comienza con una adecuada definición del mensurando, del **método de medida** (B.2.7) y del **procedimiento de medida** (B.2.8).

NOTA El término "valor verdadero" (véase Anexo D) no se utiliza en esta *Guía*, por las razones aducidas en D.3.5; los términos "valor de un mensurando" (o de una magnitud) y "valor verdadero de un mensurando" (o de una magnitud) se consideran equivalentes.

3.1.2 En general, el **resultado de una medición** (B.2.11) es sólo una aproximación o **estimación** (C.2.26) del valor del mensurando, y únicamente se halla completo cuando está acompañado de una declaración acerca de la **incertidumbre** (B.2.18) de dicha estimación.

3.1.3 En la práctica, la especificación o definición requerida del mensurando es función de la **exactitud de medida** (B.2.14) requerida por la medición. El mensurando debe definirse lo más completamente posible respecto a la exactitud requerida, de modo que para todos los efectos prácticos asociados con la medición su valor sea único. Es en este sentido, en el que se utiliza la expresión "valor del mensurando" en la presente *Guía*.

EJEMPLO Si la longitud de una barra de acero de valor nominal un metro debe determinarse con exactitud micrométrica, su especificación debe incluir la temperatura y la presión a las que se define la longitud. Así, el mensurando debe especificarse, por ejemplo, como la longitud de la barra a 25,00 °C[*] y a 101 325 Pa (más cualquier otro parámetro que se considere necesario, como la forma en que la barra debe estar apoyada). No obstante, si la longitud va a determinarse únicamente con exactitud milimétrica, su especificación no requerirá definir una temperatura o una presión, ni el valor de ningún otro parámetro.

NOTA Una definición incompleta del mensurando puede dar lugar a una componente de incertidumbre tan grande que deba ser incluida en la evaluación de la incertidumbre del resultado de medida (véanse D.1.1, D.3.4 y D.6.2).

3.1.4 En muchos casos, el resultado de una medición se determina a partir de una serie de observaciones obtenidas en **condiciones de repetibilidad** (B.2.15, nota 1).

3.1.5 La variación entre las observaciones repetidas se asume que es debida a **magnitudes de influencia** (B.2.10) que pueden afectar al resultado de medida por no mantenerse totalmente constantes.

3.1.6 El modelo matemático de la medición, que transforma la serie de observaciones repetidas en resultado de medida es de importancia crítica ya que, además de las observaciones, incluye generalmente varias magnitudes de influencia, no conocidas con exactitud. Este conocimiento imperfecto contribuye a la incertidumbre del resultado de medida, lo mismo que lo hacen las variaciones encontradas en las observaciones repetidas y cualquier otra incertidumbre asociada al propio modelo matemático.

3.1.7 Esta *Guía* trata el mensurando como escalar (magnitud única). La ampliación a un conjunto de mensurandos relacionados entre sí, determinados simultáneamente en una única medición, requiere reemplazar el mensurando escalar y su **varianza** (C.2.11, C.2.20, C.3.2) por un mensurando vectorial y por una **matriz de covarianzas** (C.3.5). En esta *Guía*, tal sustitución únicamente se considera en los ejemplos (véanse H.2, H.3 y H.4).

[*] **Nota a la versión 2008:**
De acuerdo a la Resolución 10 de la 22 CGPM (2003) "... el símbolo de la marca decimal puede ser o bien el punto en la línea o la coma en la línea...". El JCGM ha decidido adoptar en sus documentos en inglés, el punto en la línea. Sin embargo, en la versión en inglés de este documento, se ha mantenido la coma decimal por consistencia con la versión impresa del 1995.
Nota adicional: En esta versión en español, el signo decimal es la coma en la línea.

3.2 Errores, efectos y correcciones

3.2.1 En general, en una medición se cometen imperfecciones que dan lugar a un **error** (B.2.19) en el resultado de medida. Tradicionalmente, el error se ha considerado constituido por dos componentes, una componente **aleatoria** (B.2.21) y una componente **sistemática** (B.2.22).

NOTA El error es un concepto ideal, y como tal no puede ser conocido con exactitud.

3.2.2 El error aleatorio se supone que procede de variaciones de las magnitudes de influencia, de carácter temporal y espacial, impredecibles o estocásticas. Los efectos de tales variaciones, denominados en lo sucesivo *efectos aleatorios*, dan lugar a variaciones en las observaciones repetidas del mensurando. Aunque no es posible compensar el error aleatorio de un resultado de medida, habitualmente puede reducirse incrementando el número de observaciones. Su **esperanza matemática** o **valor esperado** (C.2.9, C.3.1) es igual a cero.

NOTA 1 La desviación típica experimental de la media aritmética de una serie de observaciones (véase 4.2.3) *no es* el error aleatorio de la media, aunque se designe así en algunas publicaciones. Se trata de una medida de la *incertidumbre* de la media, debido a los efectos aleatorios. Es imposible conocer el valor exacto del error de la media, debido a esos efectos.

NOTA 2 En esta *Guía*, se tiene gran cuidado en distinguir entre los términos "error" e "incertidumbre". No son sinónimos, sino que representan conceptos completamente diferentes. Por tanto, no deben ser confundidos entre sí o utilizados inadecuadamente, uno en lugar del otro.

3.2.3 El error sistemático, al igual que el error aleatorio, no puede eliminarse, pero frecuentemente puede ser reducido. Si se produce un error sistemático sobre un resultado de medida, debido a un efecto *identificado* de una magnitud de influencia (*efecto sistemático*), dicho efecto puede cuantificarse y, si es suficientemente significativo frente a la exactitud requerida en la medición, puede aplicarse una **corrección** (B.2.23) o un **factor de corrección** (B.2.24) para compensarlo. Se asume que, tras la corrección, la esperanza matemática del error debido al efecto sistemático es igual a cero.

NOTA La incertidumbre de la corrección aplicada a un resultado de medida, para compensar un efecto sistemático *no es* el error sistemático (*bias* en inglés) del resultado de medida debido a dicho efecto, tal como a veces se denomina. En lugar de eso es una medida de la *incertidumbre* del resultado debido a un conocimiento incompleto del valor de corrección requerido. El error derivado de la compensación imperfecta de un efecto sistemático no puede conocerse con exactitud. Los términos "error" e "incertidumbre" deben ser utilizados correctamente, teniendo siempre cuidado de distinguirlos entre sí.

3.2.4 Se asume que el resultado de una medición ha sido corregido por todos los efectos sistemáticos *identificado*s como significativos, tras haber hecho todo lo posible para su identificación.

EJEMPLO En la determinación de la diferencia de potencial (mensurando) existente en los bornes de una resistencia de alta impedancia se aplica una corrección debida a la impedancia finita del voltímetro utilizado, con objeto de reducir el efecto sistemático sobre el resultado de la medición, derivado del efecto de carga del voltímetro. No obstante, los valores de impedancia del voltímetro y de la resistencia, utilizados para estimar el valor de la corrección, y obtenidos a partir de otras mediciones, están asimismo afectados de incertidumbre. Estas incertidumbres deberán, pues, ser utilizadas para evaluar la componente de la incertidumbre asociada a la determinación de la diferencia de potencial, derivada de la corrección y, por tanto, del efecto sistemático debido a la impedancia finita del voltímetro.

NOTA 1 A menudo los instrumentos y sistemas de medida se ajustan o calibran utilizando patrones y materiales de referencia, con objeto de eliminar los efectos sistemáticos; aún así, deben tenerse en cuenta las incertidumbres asociadas a dichos patrones y materiales.

NOTA 2 Un caso en el que no se aplica corrección para un efecto sistemático significativo se analiza en la nota del punto 6.3.1 y en F.2.4.5.

3.3 Incertidumbre

3.3.1 La incertidumbre del resultado de una medición refleja la imposibilidad de conocer exactamente el valor del mensurando (véase 2.2). El resultado de una medición tras la corrección de los efectos sistemáticos identificados es aún una *estimación* del valor del mensurando, dada la incertidumbre debida a los efectos aleatorios y a la corrección imperfecta del resultado por efectos sistemáticos.

NOTA El resultado de una medición (tras su corrección) puede estar, sin saberlo, muy próximo al valor del mensurando (y, en consecuencia, tener un error despreciable) aunque tenga una incertidumbre elevada. Es por esto por lo que la incertidumbre del resultado de una medición no debe confundirse jamás con el error residual desconocido.

3.3.2 En la práctica existen numerosas fuentes posibles de incertidumbre en una medición, entre ellas:

a) definición incompleta del mensurando;
b) realización imperfecta de la definición del mensurando;
c) muestra no representativa del mensurando, la muestra analizada puede no representar al mensurando definido;
d) conocimiento incompleto de los efectos de las condiciones ambientales sobre la medición, o medición imperfecta de dichas condiciones ambientales;
e) lectura sesgada de instrumentos analógicos, por parte del técnico;
f) resolución finita del instrumento de medida o umbral de discriminación;
g) valores inexactos de los patrones de medida o de los materiales de referencia;
h) valores inexactos de constantes y otros parámetros tomados de fuentes externas y utilizados en el algoritmo de tratamiento de los datos;
i) aproximaciones e hipótesis establecidas en el método y en el procedimiento de medida;
j) variaciones en las observaciones repetidas del mensurando, en condiciones aparentemente idénticas.

Estas fuentes no son necesariamente independientes, y algunas de ellas, de a) a i), pueden contribuir en j). Por supuesto, un efecto sistemático no identificado no puede ser tenido en cuenta en la evaluación de la incertidumbre del resultado de una medición, aunque contribuirá a su error.

3.3.3 La Recomendación INC-1 (1980) del Grupo de Trabajo sobre la Expresión de las Incertidumbres agrupa a las componentes de la incertidumbre en dos categorías, según su método de evaluación, “A” y “B” (véanse 0.7, 2.3.2, y 2.3.3). Estas categorías se refieren a la *incertidumbre* y no sustituyen a las palabras “aleatorio” y “sistemático”. La incertidumbre de una corrección por efecto sistemático conocido puede obtenerse en algunos casos mediante una evaluación Tipo A, mientras que en otros casos puede obtenerse mediante una evaluación Tipo B; lo mismo puede decirse para una incertidumbre que caracteriza a un efecto aleatorio.

NOTA En algunas publicaciones las componentes de la incertidumbre se denominan “aleatorias” y “sistemáticas”, asociándose respectivamente a errores derivados de efectos aleatorios y sistemáticos conocidos. Tal clasificación de las componentes de la incertidumbre puede resultar ambigua si se aplica en general. Por ejemplo, una componente “aleatoria” de la incertidumbre en una medición dada puede convertirse en componente “sistemática” de la incertidumbre en otra medición en la que el resultado de la primera medición se utilice como dato de entrada. Diferenciar los *métodos* de evaluación de las propias *componentes* evita tal ambigüedad. Al mismo tiempo, ello no impide la clasificación posterior de las componentes individuales, obtenidas por ambos métodos, en grupos concebidos para ser utilizados con un objetivo particular (véase 3.4.3).

3.3.4 El propósito de la clasificación en Tipo A y Tipo B es indicar las dos formas diferentes de evaluar las componentes de incertidumbre, a efectos únicamente de su análisis; la clasificación no trata de indicar que exista alguna diferencia de naturaleza entre las componentes resultantes de ambos tipos de evaluación. Los dos tipos de evaluación se basan en **distribuciones de probabilidad** (C.2.3), y las componentes resultantes tanto de uno como del otro tipo de evaluación se cuantifican mediante varianzas o desviaciones típicas.

3.3.5 La varianza estimada u^2 que caracteriza una componente de la incertidumbre obtenida mediante una evaluación Tipo A se calcula a partir de una serie de observaciones repetidas y es la conocida varianza estimada estadísticamente s^2 (véase 4.2). La **desviación típica** estimada (C.2.12, C.2.21, C.3.3) u, raíz cuadrada positiva de u^2, es pues $u = s$ y por conveniencia, a veces se denomina *incertidumbre típica Tipo A*. Para una componente de incertidumbre obtenida a partir de una evaluación tipo B, la varianza estimada u^2 se evalúa a partir de información existente (véase 4.3) y la desviación típica estimada u a veces se denomina *incertidumbre típica Tipo B*.

Así, la incertidumbre típica tipo A se obtiene a partir de una **función de densidad de probabilidad** (C.2.5) derivada de una **distribución de frecuencia observada** (C.2.18), mientras que una incertidumbre típica tipo B se obtiene a partir de una función de densidad de probabilidad supuesta o asumida, basada en el grado de confianza que se tenga en la ocurrencia del suceso [a menudo denominada **probabilidad** (C.2.1) subjetiva]. Ambas aproximaciones se basan en interpretaciones admitidas de la probabilidad.

NOTA La evaluación tipo B de una componente de incertidumbre se basa habitualmente en un conjunto de informaciones fiables (véase 4.3.1).

3.3.6 Cuando el resultado de una medición se obtiene a partir de los valores de otras magnitudes varias, la incertidumbre típica de este resultado se denomina *incertidumbre típica combinada*, y se representa por u_c. Se trata de la desviación típica estimada asociada al resultado, y es igual a la raíz cuadrada positiva de la varianza combinada, obtenida a partir de todas las varianzas y **covarianzas** (C.3.4), como quiera que hayan sido evaluadas, utilizando lo que en esta *Guía* se denomina *ley de propagación de la incertidumbre* (véase capítulo 5).

3.3.7 Para satisfacer las necesidades de determinadas aplicaciones industriales y comerciales, así como las exigencias de los campos de la salud y la seguridad, la incertidumbre típica combinada u_c se multiplica por un *factor de cobertura k*, obteniéndose la denominada *incertidumbre expandida U*. El propósito de esta incertidumbre expandida U es proporcionar un intervalo en torno al resultado de medida, que pueda contener una gran parte de la distribución de valores que razonablemente podrían ser atribuidos al mensurando. La elección del factor k, habitualmente comprendido entre los valores 2 y 3, se fundamenta en la probabilidad o nivel de confianza requerido para el intervalo (véase capítulo 6).

NOTA El valor del factor de cobertura k debe especificarse siempre, para que pueda hallarse la incertidumbre típica de la magnitud medida, y pueda ser utilizada en el cálculo de la incertidumbre típica combinada de otros resultados de medida que pudieran depender de esta magnitud.

3.4 Consideraciones prácticas

3.4.1 Si se hacen variar todas las magnitudes de las que depende el resultado de una medición, su incertidumbre puede evaluarse por métodos estadísticos. En la práctica, sin embargo, esto no es posible, por limitaciones de tiempo y de recursos; por ello, la incertidumbre de un resultado de medida habitualmente se evalúa acudiendo a un modelo matemático de la medición, y a la ley de propagación de la incertidumbre. En la presente *Guía* está implícita la hipótesis de que a toda medición puede hacérsele corresponder un modelo matemático, hasta el grado impuesto por la exactitud requerida en la medición.

3.4.2 Dado que el modelo matemático puede ser incompleto, deben hacerse variar de forma práctica, hasta el grado máximo posible, todas las magnitudes relevantes, con objeto de que la evaluación de la incertidumbre esté basada tanto como sea posible en los datos observados. Cuando sea factible, la utilización de modelos empíricos de la medición, basados en datos cuantitativos observados durante un largo plazo, así como el uso de normativas de verificación y gráficos de control que indiquen que la medición está bajo control estadístico, debe ser parte del esfuerzo para obtener evaluaciones fiables de la incertidumbre. El modelo matemático debe revisarse cuando los datos obtenidos, incluyendo aquí los resultados de determinaciones independientes del mismo mensurando, demuestren que el modelo es incompleto. Un ensayo bien concebido puede facilitar en gran medida la consecución de evaluaciones fiables de la incertidumbre, siendo esta una parte importante del arte de la medición.

3.4.3 Con el fin de decidir si un sistema de medida funciona correctamente, a menudo se compara la variabilidad observada experimentalmente de sus valores de salida, caracterizada por su desviación típica, con la desviación típica esperada, obtenida mediante combinación de las distintas componentes de incertidumbre que caracterizan la medición. En tales casos, solamente deben considerarse aquellas componentes (hayan sido obtenidas por evaluación Tipo A o Tipo B) que puedan contribuir a la variabilidad observada experimentalmente, de los valores de salida.

NOTA Tal análisis puede verse facilitado tras clasificar las componentes en dos grupos separados y correctamente identificados, aquellas que contribuyen a la variabilidad y aquellas otras que no contribuyen.

3.4.4 En algunos casos, la incertidumbre de la corrección de un efecto sistemático no necesita ser incluida en la evaluación de la incertidumbre del resultado de medida. A pesar de haber realizado la evaluación de dicha incertidumbre, ésta puede despreciarse si su contribución a la incertidumbre típica combinada del resultado de medida es insignificante. Incluso la propia corrección puede ser ignorada, si el valor relativo de ésta con respecto a la incertidumbre típica combinada, es también despreciable.

3.4.5 En la práctica ocurre a menudo, especialmente en el campo de la metrología legal, que un instrumento es verificado mediante comparación con un patrón de medida, y las incertidumbres asociadas al patrón y al procedimiento de comparación son despreciables respecto a la exactitud exigida por el ensayo. Un ejemplo de esto es la utilización de un juego de patrones de masa calibrados, para verificar la exactitud de una balanza comercial. En tales casos, dado que las componentes de la incertidumbre son lo suficientemente pequeñas como para poder ser ignoradas, la medición puede entenderse como una forma de determinar el error del instrumento en ensayo (véase F.2.4.2).

3.4.6 La estimación del valor de un mensurando, proporcionada por el resultado de una medición, se expresa a veces en función del valor adoptado para un patrón de medida, más que en función de la unidad específica del Sistema Internacional de Unidades (SI). En tales casos, el orden de magnitud de la incertidumbre que puede atribuirse al resultado de medida, puede ser significativamente menor que si el resultado se expresara en la correspondiente unidad SI. (En efecto, el mensurando queda redefinido como la relación existente entre el valor de la magnitud bajo medición y el valor adoptado para el patrón).

EJEMPLO Un patrón de tensión Zener de alta calidad se calibra por comparación con un patrón de tensión de efecto Josephson, basado en el valor convencional de la constante de Josephson, recomendado para uso internacional por el CIPM. La incertidumbre típica combinada relativa $u_c(V_S)/V_S$ (véase 5.1.6) de la diferencia de potencial calibrada V_S del patrón Zener es 2×10^{-8}, cuando V_S se expresa en función del valor convencional, pero $u_c(V_S)/V_S$ es 4×10^{-7} cuando V_S se expresa en función de la unidad SI de diferencia de potencial, el voltio (V), debido a la incertidumbre adicional asociada al valor SI de la constante de Josephson.

3.4.7 Equivocaciones a la hora de registrar o analizar los datos observados pueden dar lugar a errores significativos y desconocidos en el resultado de una medición. Los errores de bulto pueden detectarse fácilmente tras revisar los datos tomados; los pequeños pueden quedar enmascarados, o parecer incluso variaciones aleatorias. La estimación de la incertidumbre no se ocupa de tales errores.

3.4.8 Aunque la presente *Guía* proporciona un marco de actuación para la evaluación de la incertidumbre, éste no puede nunca sustituir a la reflexión crítica, la honradez intelectual y la competencia profesional. La evaluación de la incertidumbre no es ni una tarea rutinaria ni algo puramente matemático; depende del conocimiento detallado de la naturaleza del mensurando y de la medición. La calidad y utilidad de la incertidumbre asociada al resultado de una medición dependen en último término del entendimiento, análisis crítico e integridad de aquellos que contribuyen a su evaluación.

4 Evaluación de la incertidumbre típica

En el anexo F, puede encontrarse una guía adicional, de tipo práctico, sobre cómo evaluar las componentes de la incertidumbre.

4.1 Modelo de medición

4.1.1 En la mayor parte de los casos, un mensurando Y no se mide directamente, sino que se determina a partir de otras N magnitudes $X_1, X_2, ..., X_N$, por medio de una relación funcional f:

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N) \tag{1}$$

NOTA 1 Por simplificación, en esta *Guía* se utiliza el mismo símbolo para la magnitud física (el mensurando) y para la variable aleatoria (véase 4.2.1) que representa el resultado posible de una observación de dicha magnitud. Cuando se dice que X_i responde a una distribución de probabilidad particular, el símbolo se utiliza en su segundo sentido; se supone que la propia magnitud física puede venir expresada en primera aproximación por un valor único (véanse 1.2 y 3.1.3).

NOTA 2 En una serie de observaciones, el valor k-ésimo observado de X_i se indica como $X_{i,k}$; así, si el símbolo de una resistencia es R, el k-ésimo valor observado de la resistencia es R_k.

NOTA 3 La estimación de X_i (hablando con propiedad, de su esperanza matemática) se indica como x_i.

EJEMPLO Si se aplica una diferencia de potencial V a los bornes de una resistencia cuyo valor depende de la temperatura, de la resistencia R_0 a la temperatura definida t_0 y del coeficiente lineal de temperatura α, la potencia disipada P (el mensurando) por la resistencia a la temperatura t es función de V, R_0, α, y t, según:

$$P = f(V,\ R_0,\ \alpha,\ t) = V^2 / \{R_0 [\ 1 + \alpha(t - t_0)]\}$$

NOTA Otros métodos de medida de P podrían estar representados mediante expresiones matemáticas diferentes.

4.1.2 Las *magnitudes de entrada* $X_1, X_2, \ldots, X_N$, de las que depende la *magnitud de salida* Y pueden ser consideradas a su vez como mensurandos, pudiendo depender de otras magnitudes, junto con las correcciones y factores de corrección de los efectos sistemáticos, llegándose así a una relación funcional f compleja, que podría ser difícil de escribir en forma explícita. Además, la función f puede determinarse experimentalmente (véase 5.1.4) o existir solamente en forma de algoritmo calculable numéricamente. Tal como aparece en esta *Guía*, la función f debe interpretarse en su concepto más amplio; en particular, como la función que contiene cada magnitud, incluyendo todas las correcciones y factores de corrección, susceptible de contribuir a una componente significativa de la incertidumbre del resultado de medida.

En consecuencia, si los datos indican que esta función f no representa la medición con el grado impuesto por la exactitud exigida por el resultado de medida, deben introducirse en f magnitudes de entrada adicionales, para eliminar la falta de adecuación (véase 3.4.2). Podría ser necesario introducir una magnitud de entrada que reflejara el conocimiento incompleto de un fenómeno que afecta al mensurando. En el ejemplo de 4.1.1, podrían introducirse magnitudes de entrada adicionales para tener en cuenta una distribución de temperatura que se sabe no es uniforme a lo largo de la resistencia, un coeficiente de temperatura de la resistencia no lineal, o un posible efecto de la presión atmosférica.

NOTA - La ecuación (1) puede ser tan sencilla como $Y = X_1 - X_2$. Esta expresión representa, por ejemplo, la comparación de dos determinaciones de la misma magnitud X.

4.1.3 El conjunto de magnitudes de entrada $X_1, X_2, \ldots, X_N$ puede clasificarse en:

- magnitudes cuyos valores e incertidumbres se determinan directamente en el curso de la medición. Estos valores e incertidumbres pueden obtenerse, por ejemplo, a partir de una única observación, o a partir de observaciones repetidas, o por una decisión basada en la experiencia. Pueden implicar la determinación de correcciones para las lecturas de los instrumentos y correcciones debidas a las magnitudes de influencia, tales como la temperatura ambiente, la presión atmosférica o la humedad;

- magnitudes cuyos valores e incertidumbres se introducen en la medición procedentes de fuentes externas, tales como magnitudes asociadas a patrones, a materiales de referencia certificados y a valores de referencia tomados de publicaciones.

4.1.4 Una estimación del mensurando Y, representada por y, se obtiene a partir de la ecuación (1) utilizando las estimaciones de entrada $x_1, x_2, \ldots, x_N$ para los valores de N magnitudes $X_1, X_2, ..., X_N$. Así, la *estimación de salida y*, que es el resultado de la medición, viene dada por

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N) \tag{2}$$

NOTA - En algunos casos, la estimación y puede obtenerse a partir de:

$$y = \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(X_{1,k}, X_{2,k}, \ldots, X_{N,k}\right)$$

Es decir, que y se toma como la media aritmética (véase 4.2.1) de n determinaciones independientes Y_k de Y, teniendo cada determinación la misma incertidumbre, y basándose cada una en un conjunto completo de valores observados de N magnitudes de entrada X_i obtenidas al mismo tiempo. En lugar de hacer $y = f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_N)$ donde

$$\overline{X}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{i,k}$$

es la media aritmética de las observaciones individuales $X_{i,k}$, esta otra forma de calcular la media puede ser preferible cuando f sea una función no lineal de las magnitudes de entrada $X_1, X_2, \ldots, X_N$, pero las dos aproximaciones son idénticas si f es una función lineal de las X_i (véanse H.2 y H.4).

4.1.5 La desviación típica estimada asociada a la estimación de salida o resultado de medida y, denominada *incertidumbre típica combinada* y representada por $u_c(y)$, se determina a partir de la desviación típica estimada, asociada a cada estimación de entrada x_i, denominada *incertidumbre típica* y representada por $u(x_i)$ (véase 3.3.5 y 3.3.6).

4.1.6 Cada estimación de entrada x_i, así como su incertidumbre asociada $u(x_i)$ se obtienen a partir de una distribución de valores posibles de la magnitud de entrada X_i. Esta distribución de probabilidad puede basarse en una distribución de frecuencias; es decir, en una serie de observaciones $X_{i,k}$ de las X_i, o puede tratarse de una distribución supuesta *a priori*. Las evaluaciones Tipo A de las componentes de la incertidumbre típica se basan en distribuciones de frecuencia mientras que las evaluaciones Tipo B se basan en distribuciones supuestas *a priori*. Debe tenerse en cuenta que, en los dos casos, las distribuciones son modelos utilizados para representar nuestro nivel de conocimiento.

4.2 Evaluación tipo A de la incertidumbre típica

4.2.1 En la mayor parte de los casos, la mejor estimación disponible de la esperanza matemática μ_q de una magnitud q que varía al azar [es decir, de una **variable aleatoria** (C.2.2)], de la que se han obtenido n observaciones independientes q_k en las mismas condiciones de medida (véase B.2.15), es la **media aritmética** $\overline{q}$ (C.2.19) de las n observaciones:

$$\overline{q} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k \tag{3}$$

Así, para una magnitud de entrada X_i estimada a partir de n observaciones repetidas e independientes $X_{i,k}$, la media aritmética $\overline{X}_i$ obtenida mediante la ecuación (3) es utilizada como estimación de entrada x_i en la ecuación (2) para determinar el resultado de medida y, tomándose pues $x_i = \overline{X}_i$. Las estimaciones de entrada no calculadas mediante observaciones repetidas deben obtenerse por otros métodos, tales como los indicados en la segunda categoría de 4.1.3.

4.2.2 Los valores de las observaciones individuales q_k difieren en razón de las variaciones aleatorias de las magnitudes de influencia o de efectos aleatorios (véase 3.2.2). La varianza experimental de las observaciones, que estima la varianza σ^2 de la distribución de probabilidad de q, viene dada por:

$$s^2(q_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(q_j - \overline{q})^2 \tag{4}$$

Esta estimación de la varianza y su raíz cuadrada positiva $s(q_k)$, denominada **desviación típica experimental** (B.2.17), representan la variabilidad de los valores observados q_k, o más específicamente, su dispersión alrededor de su media $\overline{q}$.

4.2.3 La mejor estimación de $\sigma^2(\overline{q}) = \sigma^2/n$, varianza de la media, viene dada por

$$s^2(\overline{q}) = \frac{s^2(q_k)}{n} \tag{5}$$

La varianza experimental de la media $s^2(\overline{q})$ y la **desviación típica experimental de la media** $s(\overline{q})$ (B.2.17, nota 2), igual a la raíz cuadrada positiva de $s^2(\overline{q})$, determinan la bondad con que $\overline{q}$ estima la esperanza matemática μ_q de q, y una u otra pueden ser utilizadas como medida de la incertidumbre de $\overline{q}$.

De este modo, para una magnitud de entrada X_i obtenida a partir de n observaciones repetidas e independientes $X_{i,k}$, la incertidumbre típica $u(x_i)$ de su estimación $x_i = \overline{X}_i$ es $u(x_i) = s(\overline{X}_i)$, con $s^2(\overline{X}_i)$ calculada según la ecuación (5). Por comodidad, $u^2(x_i) = s^2(\overline{X}_i)$ y $u(x_i) = s(\overline{X}_i)$ son a veces llamadas *varianza Tipo A* e *incertidumbre típica tipo A,* respectivamente.

NOTA 1 El número de observaciones n debe ser suficientemente grande para garantizar que $\overline{q}$ proporcione una estimación fiable de la esperanza matemática μ_q de la variable aleatoria q, y para que $s^2(\overline{q})$ proporcione una estimación fiable de la varianza $\sigma^2(\overline{q}) = \sigma^2/n$, (véase nota de 4.3.2). La diferencia entre $s^2(\overline{q})$ y $\sigma^2(\overline{q})$ debe tomarse en consideración cuando se determinan intervalos de confianza (véase 6.2.2). En este caso, si la distribución de probabilidad de q es una distribución normal (véase 4.3.4), la diferencia se tiene en cuenta mediante la distribución-t (véase G.3.2).

NOTA 2 Aunque la varianza $s^2(\overline{q})$ es la magnitud fundamental, la desviación típica $s(\overline{q})$ es, en la práctica, más cómoda de utilizar porque posee la misma dimensión que q y un valor más significativo que el de la varianza.

4.2.4 En una medición bien diseñada y bajo control estadístico, puede existir una estimación de la varianza s_p^2, combinada o procedente de un conjunto previo de resultados (o la desviación típica experimental correspondiente s_p) que la caracterice. En tal caso, cuando se determina el valor de un mensurando q a partir de n observaciones independientes, la varianza experimental de la media aritmética $\overline{q}$ de las observaciones resulta mejor estimada por s_p^2/n que por $s^2(q_k)/n$ y la incertidumbre típica es $u = s_p/\sqrt{n}$. (Véase también la nota de H.3.6).

4.2.5 Frecuentemente, la estimación x_i de una magnitud de entrada X_i se obtiene a partir de una curva ajustada a resultados experimentales por el método de mínimos cuadrados. Las varianzas estimadas y las incertidumbres típicas resultantes de los parámetros de ajuste característicos de la curva y de cualesquiera puntos predecibles pueden calcularse habitualmente por procedimientos estadísticos conocidos (véanse H.3 y referencia [8]).

4.2.6 El número de **grados de libertad** (C.2.31) ν_i de $u(x_i)$ (véase G.3), igual a $n - 1$ en el caso más sencillo, donde $x_i = \overline{X}_i$ y $u(x_i) = s(\overline{X}_i)$, se calcula a partir de n observaciones independientes, como en 4.2.1 y 4.2.3, y debe figurar siempre que se indiquen las evaluaciones Tipo A de las componentes de la incertidumbre.

4.2.7 Si existe una correlación entre las variaciones aleatorias de las observaciones de una magnitud de entrada, por ejemplo en función del tiempo, la media y la desviación típica experimental de la media, tal como se dan en 4.2.1 y 4.2.3, pueden ser **estimadores** (C.2.25) inadecuados de los **estadísticos** (C.2.23) buscados. En tales casos, las observaciones deben analizarse por métodos estadísticos especialmente diseñados para tratar series de mediciones correlacionadas variando aleatoriamente.

NOTA Estos métodos especiales se utilizan para tratar las mediciones de patrones de frecuencia. Sin embargo, también es posible utilizarlos en mediciones de otras magnitudes metrológicas, cuando se pasa de mediciones a corto plazo a mediciones a largo plazo, donde la hipótesis de variaciones aleatorias no correlacionadas pudiera no ser válida. (Véase referencia [9], por ejemplo, para una discusión detallada de la varianza de Allan).

4.2.8 La discusión sobre la evaluación Tipo A de la incertidumbre típica realizada de 4.2.1 a 4.2.7 no pretende ser exhaustiva; existen numerosas situaciones, algunas relativamente complejas, que pueden tratarse por métodos estadísticos. Un ejemplo importante se refiere a la utilización de modelos de calibración, a menudo basados en el método de mínimos cuadrados, para evaluar las incertidumbres procedentes de variaciones aleatorias, tanto a corto como a largo plazo, de los resultados de comparaciones de patrones materializados de valor desconocido, tales como bloques patrón o patrones de masa, con patrones de referencia de valor conocido. En tales situaciones de medida, relativamente sencillas, las componentes de la incertidumbre pueden evaluarse frecuentemente mediante análisis estadístico de los datos obtenidos a partir de diseños experimentales, consistentes en secuencias anidadas de mediciones del mensurando, para diferentes valores de las magnitudes de las que depende - esta técnica se denomina análisis de la varianza, ANOVA (véase H.5).

NOTA En los niveles inferiores de la cadena de calibración, en los que se supone frecuentemente que los patrones de referencia son conocidos con exactitud, por haber sido calibrados en un laboratorio nacional o primario, la incertidumbre de un resultado de calibración puede ser una simple incertidumbre típica tipo A, evaluada mediante la desviación típica experimental obtenida a partir de un conjunto acumulado de resultados, que representa al mensurando.

4.3 Evaluación Tipo B de la incertidumbre típica

4.3.1 Para una estimación x_i de una magnitud de entrada X_i no obtenida a partir de observaciones repetidas, la varianza estimada asociada $u^2(x_i)$ o la incertidumbre típica $u(x_i)$ se establecen mediante decisión científica basada en toda la información disponible acerca de la variabilidad posible de X_i. El conjunto de la información puede comprender:

- resultados de mediciones anteriores;
- experiencia o conocimientos generales sobre el comportamiento y las propiedades de los materiales e instrumentos utilizados;
- especificaciones del fabricante;
- datos suministrados por certificados de calibración u otros tipos de certificados;
- incertidumbres asignadas a valores de referencia procedentes de libros y manuales.

Por conveniencia, los valores $u^2(x_i)$ y $u(x_i)$ así evaluados, se denominan respectivamente *varianza Tipo B* e *incertidumbre típica Tipo B*.

NOTA Cuando x_i se obtiene a partir de una distribución *a priori*, la varianza asociada debería escribirse correctamente como $u^2(X_i)$ pero, con ánimo de simplificar, a lo largo de la *Guía* se utilizan $u^2(x_i)$ y $u(x_i)$.

4.3.2 La utilización correcta del conjunto de informaciones disponibles para una evaluación Tipo B de la incertidumbre típica se fundamenta en la experiencia y en el conocimiento general, siendo ésta una disciplina que puede aprenderse con la práctica. No debe olvidarse que una evaluación Tipo B de la incertidumbre típica puede ser tan fiable como una evaluación Tipo A, especialmente en situaciones en las que una evaluación Tipo A se basa en un número relativamente pequeño de observaciones estadísticamente independientes.

NOTA Si la distribución de probabilidad de q en la nota 1 de 4.2.3 es normal, entonces $\sigma[s(\overline{q})]/\sigma(\overline{q})$, desviación típica relativa de $s(\overline{q})$ respecto a $\sigma(\overline{q})$, es aproximadamente igual a $[2(n-1)]^{-1/2}$. Tomando entonces $\sigma[s(\overline{q})]$ como la incertidumbre de $s(\overline{q})$, la incertidumbre relativa de $s(\overline{q})$ es del 24 % para $n = 10$ observaciones, y del 10 % para $n = 50$ observaciones. (En la tabla E.1 del anexo E se incluyen más valores).

4.3.3 Si la estimación x_i se obtiene a partir de una especificación del fabricante, de un certificado de calibración, de una publicación o de otra fuente, y su incertidumbre viene dada como un múltiplo específico de una desviación típica, la incertidumbre típica $u(x_i)$ es simplemente el cociente entre el valor indicado y el factor multiplicador, y la varianza estimada $u^2(x_i)$ es el cuadrado de dicho cociente.

EJEMPLO Un certificado de calibración indica que la masa de un patrón de acero inoxidable, de valor nominal igual a un kilogramo, es m_S = 1 000, 000 325 g, y que "la incertidumbre de este valor es de 240 µg, para un nivel de tres desviaciones típicas". La incertidumbre típica del patrón de masa es simplemente $u(m_S)$ = (240 µg)/3 = 80 µg. Esto corresponde a una incertidumbre típica relativa $u(m_S)/m_S$ de 80×10^{-9} (véase 5.1.6). La varianza estimada es $u^2(m_S)$ = (80 µg)^2 = $6{,}4\times10^{-9}$ g^2.

NOTA En numerosos casos, apenas se dispone de información acerca de las componentes individuales que han permitido obtener la incertidumbre indicada. Esto carece generalmente de importancia para expresar la incertidumbre según lo sugerido en esta *Guía*, ya que todas las incertidumbres típicas son tratadas de la misma forma cuando se calcula la incertidumbre típica combinada de un resultado de medida (véase capítulo 5).

4.3.4 La incertidumbre de x_i no siempre viene expresada como un múltiplo de una desviación típica, como en 4.3.3. En su lugar, puede definir un intervalo correspondiente a un nivel de confianza del 90, 95 ó 99 por ciento (véase 6.2.2). Salvo indicación en contra, puede suponerse que se ha utilizado una **distribución normal** (C.2.14) para calcular la incertidumbre, obteniéndose la incertidumbre típica de x_i mediante simple división del valor de incertidumbre dado por el factor correspondiente de la distribución normal. Dicho factor, para los tres niveles de confianza citados, es 1,64; 1,96 y 2,58 (véase también tabla G.1 en anexo G).

NOTA Tal hipótesis no es necesaria si la incertidumbre se da siguiendo las recomendaciones de esta *Guía*, la cual subraya que siempre debe citarse el factor de cobertura utilizado (véase 7.2.3).

EJEMPLO Un certificado de calibración indica que el valor R_S de una resistencia patrón de valor nominal 10 Ω es 10,000 742 Ω ± 129 µΩ a 23 °C, y que "la incertidumbre indicada de 129 µΩ define un intervalo con nivel de confianza del 99 por ciento". La incertidumbre típica del valor de la resistencia puede suponerse que es $u(R_S)$ = (129 µΩ) / 2,58 = 50 µΩ, que corresponde a una incertidumbre típica relativa $u(R_S)/R_S$ de $5{,}0\times10^{-6}$ (véase 5.1.6). La varianza estimada es $u^2(R_S)$ = (50 µΩ)^2 = $2{,}5\times10^{-9}$ Ω^2.

4.3.5 Consideremos el caso en que, en base a las informaciones disponibles, puede afirmarse que "existe una probabilidad del 50 % de que el valor de la magnitud de entrada X_i esté comprendido en el intervalo de a_- a a_+". Si puede suponerse que los valores posibles de X_i se distribuyen aproximadamente según una distribución normal, entonces la mejor estimación x_i de X_i puede tomarse en el centro del intervalo. Además, si la semiamplitud del intervalo es $a = (a_+ - a_-)/2$, puede tomarse $u(x_i) = 1{,}48a$, ya que, para una distribución normal de esperanza matemática μ y desviación típica σ, el intervalo $\mu \pm \sigma/1{,}48$ cubre aproximadamente el 50 % de la distribución.

EJEMPLO Un mecánico que determina las dimensiones de una pieza estima que su longitud se sitúa, con una probabilidad de 0,5 en el intervalo de 10,07 mm a 10,15 mm, y expresa ésta como l = (10,11 ± 0,04) mm; esto significa que ± 0,04 mm define un intervalo que tiene un nivel de confianza del 50 %. Entonces a = 0,04 mm y se asume una distribución normal para los posibles valores de l. La incertidumbre típica de la longitud es $u(l)$ = 1,48 × 0,04 mm ≈ 0,06 mm y la varianza estimada es $u^2(l)$ = (1,48 × 0,04 mm)^2 = = $3{,}5 \times 10^{-3}$mm^2.

4.3.6 Consideremos un caso análogo al de 4.3.5 pero en el que, según la información de que se dispone, puede decirse que "en dos de cada tres casos, el valor X_i se encuentra en el intervalo comprendido entre a_- y a_+" (en otras palabras, la probabilidad de que X_i esté comprendida en este intervalo es del orden de 0,67; es decir, del 67 %). En este caso puede suponerse 'razonablemente' que $u(x_i) = a$, puesto que para una distribución normal de esperanza matemática μ y desviación típica σ, el intervalo $\mu \pm \sigma$ abarca aproximada mente el 68,3 % de la distribución.

NOTA Si se utilizara el percentil normal 0,967 42, correspondiente a la probabilidad $p = 2/3$; es decir, si se escribiera $u(x_i) = a/0{,}967\,42 = 1{,}033\,a$, se daría al valor de $u(x_i)$ mucha más importancia de la que en realidad se justifica.

4.3.7 En otros casos, puede que únicamente sea posible estimar límites (inferior y superior) para X_i, en particular, para poder decir que "la probabilidad de que el valor de X_i esté comprendido en el intervalo de a_- a a_+ es a todos los efectos prácticamente igual a uno y la probabilidad de que X_i se encuentre fuera de este intervalo es esencialmente cero". Si *no se posee ningún conocimiento específico* sobre los valores posibles de X_i dentro del intervalo, puede asumirse que X_i puede encontrarse con igual probabilidad en cualquier punto del mismo (distribución uniforme o rectangular de los valores posibles —véanse 4.4.5 y figura 2a). Entonces x_i, esperanza matemática de X_i, está en el punto medio del intervalo, $x_i = (a_- + a_+)/2$, con varianza asociada

$$u^2(x_i) = (a_+ - a_-)^2/12 \tag{6}$$

Si la diferencia entre los límites, $a_+ - a_-$, se considera como $2a$, entonces la ecuación (6) se convierte en

$$u^2(x_i) = a^2/3 \tag{7}$$

NOTA Cuando una componente de incertidumbre determinada de esta forma contribuye significativamente a la incertidumbre de un resultado de medida, es prudente obtener más datos complementarios para su evaluación posterior.

EJEMPLO 1 Un manual da como valor del coeficiente de dilatación lineal del cobre puro a 20 °C, α_{20}(Cu) = 16,52 × 10^{-6} °C^{-1}, y dice que "el error de este valor no es mayor de 0,40 × 10^{-6} °C^{-1}". Basándose en esta información limitada, es razonable suponer que el valor de α_{20}(Cu) está comprendido con igual probabilidad en el intervalo de 16,12 × 10^{-6} °C^{-1} a 16,92 × 10^{-6} °C^{-1}, y que es muy poco probable que α_{20}(Cu) se encuentre fuera de ese intervalo. La varianza de esta distribución rectangular simétrica de valores posibles de α_{20}(Cu), de semiamplitud a = 0,40 × 10^{-6} °C^{-1} es, según la ecuación (7), $u^2(\alpha_{20})$ = (0,40 × 10^{-6} °C^{-1})^2/3 = 53,3 × 10^{-15} °C^{-2}, siendo la incertidumbre típica $u(\alpha_{20})$ = (0,40 × 10^{-6} °C^{-1})^2/√3 = 0,23 × 10^{-6} °C^{-1}.

EJEMPLO 2 Las especificaciones del fabricante de un voltímetro digital indican que "entre uno y dos años después de la calibración del instrumento, su exactitud en el rango de 1 V es 14 × 10^{-6} veces la lectura más 2 × 10^{-6} veces el rango". Supongamos que el instrumento se utiliza 20 meses después de la calibración para medir una diferencia de potencial V en el rango de 1 V, y que se obtiene como media aritmética de un número de observaciones repetidas e independientes el valor $\overline{V}$ = 0,928 571 V, con una incertidumbre típica tipo A, $u(\overline{V})$ = 12 μV. La evaluación Tipo B de la incertidumbre típica se deduce de las especificaciones del fabricante, si se supone que la exactitud indicada representa los límites simétricos de una corrección aditiva a $\overline{V}$, $\Delta\overline{V}$, de esperanza matemática igual a cero y pudiendo situarse con igual probabilidad entre dichos límites. La semiamplitud a de la distribución rectangular simétrica de los valores posibles de $\Delta\overline{V}$, es entonces a = (14 × 10^{-6}) × (0,928 571 V) + (2 × 10^{-6}) × (1V) = 15 μV y, a partir de la ecuación (7), $u^2(\Delta\overline{V})$ = 75 μV^2 y $u(\Delta\overline{V})$ = 8,7 μV. La estimación del valor del mensurando V, denominada por simplificación con el mismo símbolo V, viene dada por $V = \overline{V} + \Delta\overline{V}$ = 0,928 571 V. Puede obtenerse la incertidumbre típica combinada de esta estimación combinando la incertidumbre típica Tipo A de $\overline{V}$, 12 μV, con la incertidumbre típica Tipo B de $\Delta\overline{V}$, 8,7 μV. El método general de combinación de las componentes de la incertidumbre típica viene dado en el capítulo 5, analizándose este ejemplo particular en 5.1.5.

4.3.8 En 4.3.7, los límites superior e inferior a_+ y a_- para la magnitud de entrada X_i pueden no ser simétricos respecto a su mejor estimación x_i; en concreto, si el límite inferior es $a_- = x_i - b_-$ y el límite superior es $a_+ = x_i + b_+$, ello significa que $b_- \neq b_+$. Dado que, en este caso, x_i (esperanza matemática de X_i) no está en el centro del intervalo de a_- a a_+, la distribución de probabilidad de X_i puede no ser uniforme en todo el intervalo. No obstante, si no se dispone de información suficiente para elegir una distribución conveniente, diferentes modelos conducirán a diferentes expresiones de la varianza. En ausencia de tal información, la aproximación más sencilla es:

$$u^2(x_i) = \frac{(b_+ + b_-)^2}{12} = \frac{(a_+ - a_-)^2}{12} \tag{8}$$

que es la varianza de una distribución rectangular de amplitud total $b_+ + b_-$ (En F.2.4.4 y G.5.3 se analizan también distribuciones asimétricas).

EJEMPLO Si en el ejemplo 1 de 4.3.7, al valor del coeficiente dado en el manual, α_{20}(Cu) = 16,52 × 10^{-6} °C^{-1}, se añade que "el menor valor posible es 16,40 × 10^{-6} °C^{-1} y el mayor valor posible es 16,92×10^{-6} °C^{-1}, entonces b_-= 0,12×10^{-6} °C^{-1} y b_+ = 0,40×10^{-6} °C^{-1}, y de la ecuación (8) se obtiene $u(\alpha_{20})$ = 0,15×10^{-6} °C^{-1}.

NOTA 1 En numerosas situaciones prácticas de medida en que los límites son asimétricos, puede ser apropiado aplicar una corrección de valor $(b_+ - b_-)/2$ a la estimación x_i, de forma que la nueva estimación x_i' de X_i se sitúe en el centro del intervalo: $x_i' = (a_- + a_+)/2$. Esto conduce a la situación del caso de 4.3.7, con nuevos valores $b_+' = b_-' = (b_+ + b_-)/2 = (a_+ - a_-)/2 = a$.

NOTA 2 Basándose en el principio de máxima entropía, la densidad de probabilidad para el caso asimétrico puede tomarse como $p(X_i) = A \exp[-\lambda(X_i - x_i)]$, con $A = [b_- \exp(\lambda b_-) + b_+ \exp(-\lambda b_+)]^{-1}$ y $\lambda = \{\exp[\lambda(b_- + b_+)]-1\}/\{b_- \exp[\lambda(b_- + b_+)] + b_+\}$. Esto conduce a una varianza $u^2(x_i) = b_+ b_- - (b_+ - b_-)/\lambda$; para $b_+ > b_-$, $\lambda > 0$ y para $b_+ < b_-$, $\lambda < 0$.

4.3.9 En 4.3.7, dado que no había conocimiento específico sobre los valores posibles de X_i dentro de sus límites estimados de a_- a a_+, únicamente se pudo suponer que X_i tenía la misma probabilidad de tomar cualquiera de los valores en el interior de esos límites y una probabilidad nula fuera de ellos. Tales discontinuidades en forma de función escalón para una distribución de probabilidad, raramente se dan en la física. En numerosos casos, es más realista suponer que los valores cerca de los límites son menos probables que los situados en torno al centro. Es entonces razonable reemplazar la distribución rectangular simétrica por una distribución trapezoidal simétrica de pendientes iguales (un trapecio isósceles), con una base mayor de anchura $a_+ - a_- = 2a$ y una base menor de anchura $2a\beta$, donde $0 \le \beta \le 1$. Cuando $\beta \rightarrow 1$ esta distribución trapezoidal se aproxima a la distribución rectangular de 4.3.7, mientras que para $\beta = 0$ es una distribución triangular (véase 4.4.6 y figura 2b). Suponiendo tal distribución trapezoidal para X_i, se encuentra que la esperanza matemática de X_i es $x_i = (a_- + a_+)/2$ y su varianza es:

$$u^2(x_i) = a^2(1 + \beta^2) / 6 \tag{9a}$$

que se convierte, para la distribución triangular con $\beta = 0$, en:

$$u^2(x_i) = a^2 / 6 \tag{9b}$$

NOTA 1 Para una distribución normal de esperanza matemática μ y desviación típica σ, el intervalo $\mu \pm 3\sigma$ comprende aproximadamente el 99,73 por ciento de la distribución. Si los límites superior e inferior, a_+ y a_-, definen un intervalo con un 99,73 por ciento, en lugar de con un 100 por ciento, y si X_i puede suponerse distribuida de forma aproximadamente normal, en lugar de carecer de información específica sobre X_i entre los limites, como en 4.3.7, entonces $u^2(x_i) = a^2 / 9$. En comparación, la varianza de una distribución rectangular simétrica de semiamplitud a es $a^2/3$ [ecuación (7)] y la de una distribución triangular simétrica de semiamplitud a es $a^2/6$ [ecuación (9b)]. Los valores de las varianzas para las tres distribuciones son sorprendentemente similares a pesar de las grandes diferencias de información que las justifican.

NOTA 2 La distribución trapezoidal es equivalente a la convolución de dos distribuciones rectangulares [10], una de semiamplitud a_1 igual a la semiamplitud media del trapecio, $a_1 = a\,(1+\beta)\,/2$, y la otra de semiamplitud a_2 igual a la anchura media de una de las porciones triangulares del trapecio, $a_2 = a\,(1-\beta)\,/2$. La varianza de la distribución es $u^2 = a_1^2\,/3 + a_2^2\,/3$. La distribución resultante puede interpretarse como una distribución rectangular cuya anchura $2a_1$ posee una incertidumbre representada a su vez por una distribución rectangular de anchura $2a_2$ y explica el hecho de que los límites de una magnitud de entrada no son conocidos con exactitud. Incluso si a_2 fuera el 30 por ciento de a_1, u superaría a $a_1/\sqrt{3}$ en menos de un 5 por ciento.

4.3.10 Es importante no contabilizar dos veces las mismas componentes de incertidumbre. Si una componente de incertidumbre procedente de un efecto particular se obtiene mediante una evaluación Tipo B, no debe introducirse como componente independiente en el cálculo de la incertidumbre típica combinada del resultado de medida, salvo, si acaso, la parte de efecto que no contribuye a la variabilidad de las observaciones. La incertidumbre debida a la parte del efecto que contribuye a la variabilidad observada está ya incluida en la componente de incertidumbre obtenida mediante análisis estadístico de las observaciones.

4.3.11 Los ejemplos de evaluación Tipo B de la incertidumbre típica, de 4.3.3 a 4.3.9, se proponen únicamente a título de muestra. Además, es necesario basar lo más posible las evaluaciones de incertidumbre en datos cuantitativos, como se subraya en 3.4.1 y 3.4.2.

4.4 Ilustración gráfica de la evaluación de la incertidumbre típica

4.4.1 La figura 1 representa la estimación del valor de una magnitud de entrada X_i y la evaluación de la incertidumbre de dicha estimación, a partir de la distribución desconocida de los valores medidos posibles de X_i, o a partir de la distribución de probabilidad de X_i, muestreada mediante observaciones repetidas.

4.4.2 En la figura 1(a) se asume que la magnitud de entrada X_i es una temperatura t y que su distribución desconocida es una distribución normal, con esperanza matemática μ_t = 100 °C y desviación típica σ = 1,5 °C. Su función de densidad de probabilidad es entonces (véase C.2.14)

$$p\,(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-(t-\mu_t)^2 / 2\sigma^2\right]$$

NOTA La definición de función de densidad de probabilidad $p(z)$ requiere que se cumpla la relación $\int p(z)\,\mathrm{d}z = 1$

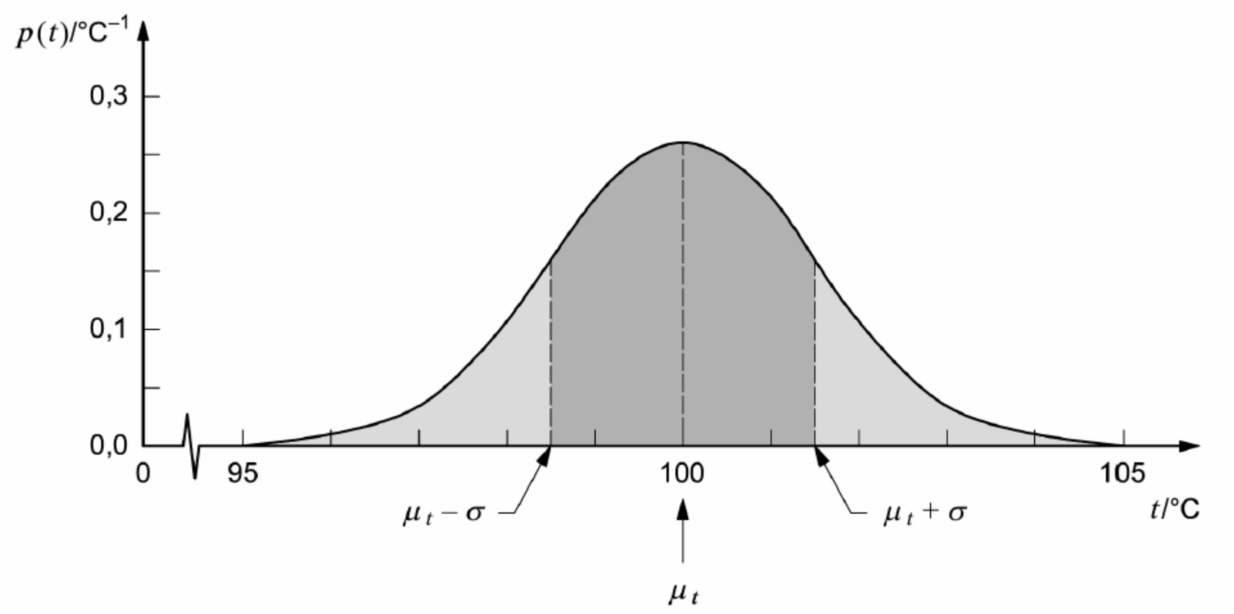
4.4.3 La figura 1(b) presenta un histograma de n = 20 observaciones repetidas t_k de la temperatura t supuestamente tomadas al azar, a partir de la distribución de la figura 1(a). Para obtener el histograma, las 20 observaciones, cuyos valores se dan en la tabla 1, se han agrupado en intervalos de anchura 1 °C. (Naturalmente, no es necesario preparar un histograma para el análisis estadístico de los datos).

Tabla 1 - Veinte observaciones repetidas de la temperatura *t* agrupadas en intervalos de 1 ºC

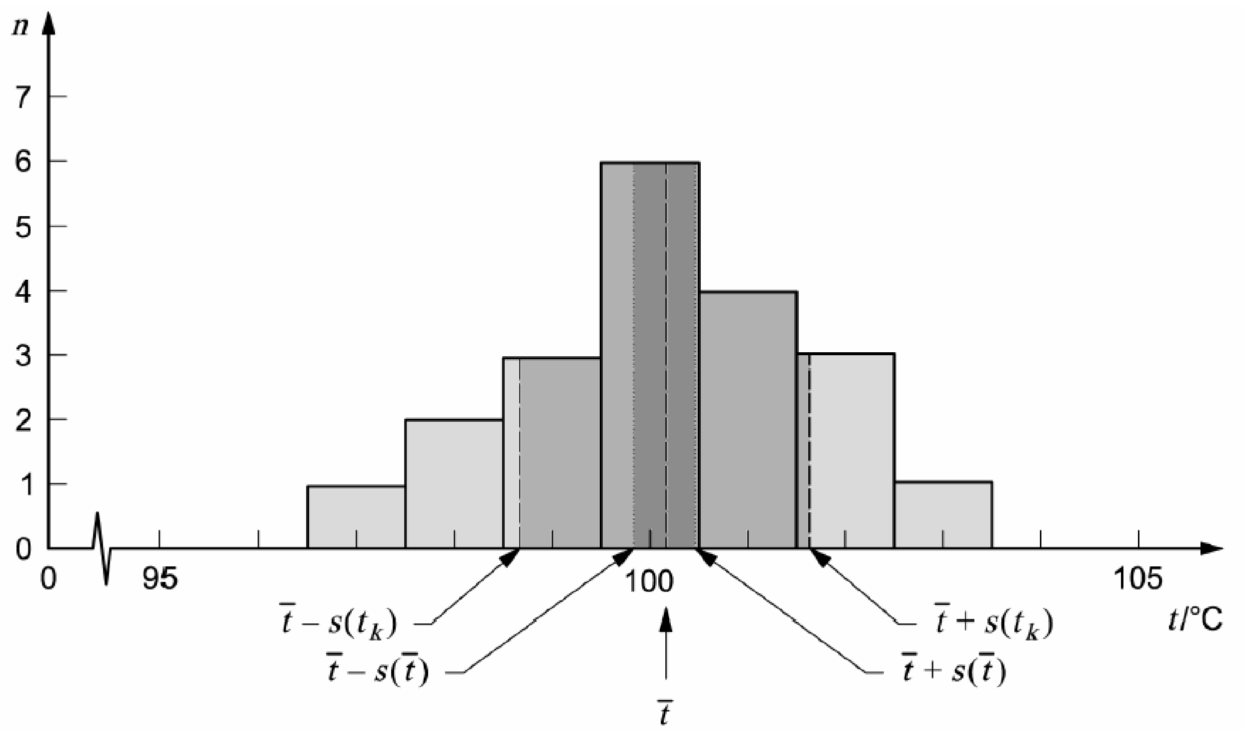
Intervalo $t_1 \leq t < t_2$		Temperatura
t_1 / ºC	t_2 / ºC	t / ºC
94,5	95,5	—
95,5	96,5	—
96,5	97,5	96,90
97,5	98,5	98,18; 98,25
98,5	99,5	98,61; 99,03; 99,49
99,5	100,5	99,56; 99,74; 99,89; 100,07; 100,33; 100,42
100,5	101,5	100,68; 100,95; 101,11; 101,20
101,5	102,5	101,57; 101,84; 102,36
102,5	103,5	102,72
103,5	104,5	—
104,5	105,5	—

La media aritmética $\bar{t}$ de las n = 20 observaciones, calculada según la ecuación (3) es $\bar{t}$ = 100,145 °C ≈ ≈ 100,14 °C, tomándose ésta como la mejor estimación de la esperanza matemática μ_t de t, en base a los datos disponibles. La desviación típica experimental $s(t_k)$, calculada según la ecuación (4), es $s(t_k)$ = 1,489 °C ≈ ≈1,49 °C, y la desviación típica experimental de la media, $s(\bar{t})$, calculada según la ecuación (5), que es además la incertidumbre típica $u(\bar{t})$, es $u(\bar{t}) = s(\bar{t}) = s(t_k)/\sqrt{20} = 0{,}333\ ^\circ\mathrm{C} \approx 0{,}33\ ^\circ\mathrm{C}$. (Para los cálculos posteriores, interesa conservar todas las cifras).

NOTA Aunque los datos de la tabla 1 son verosímiles, dado el uso tan extendido de los termómetros electrónicos digitales de alta resolución, se dan a título ilustrativo, no debiendo necesariamente interpretarse como descriptivos de una medición real.

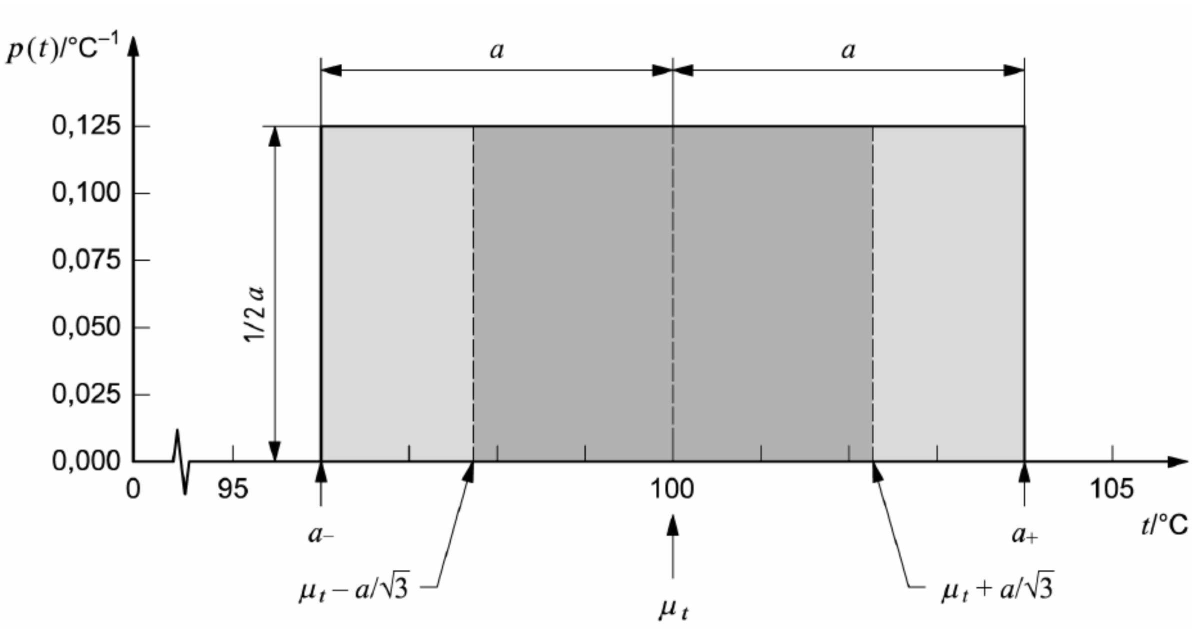


a)

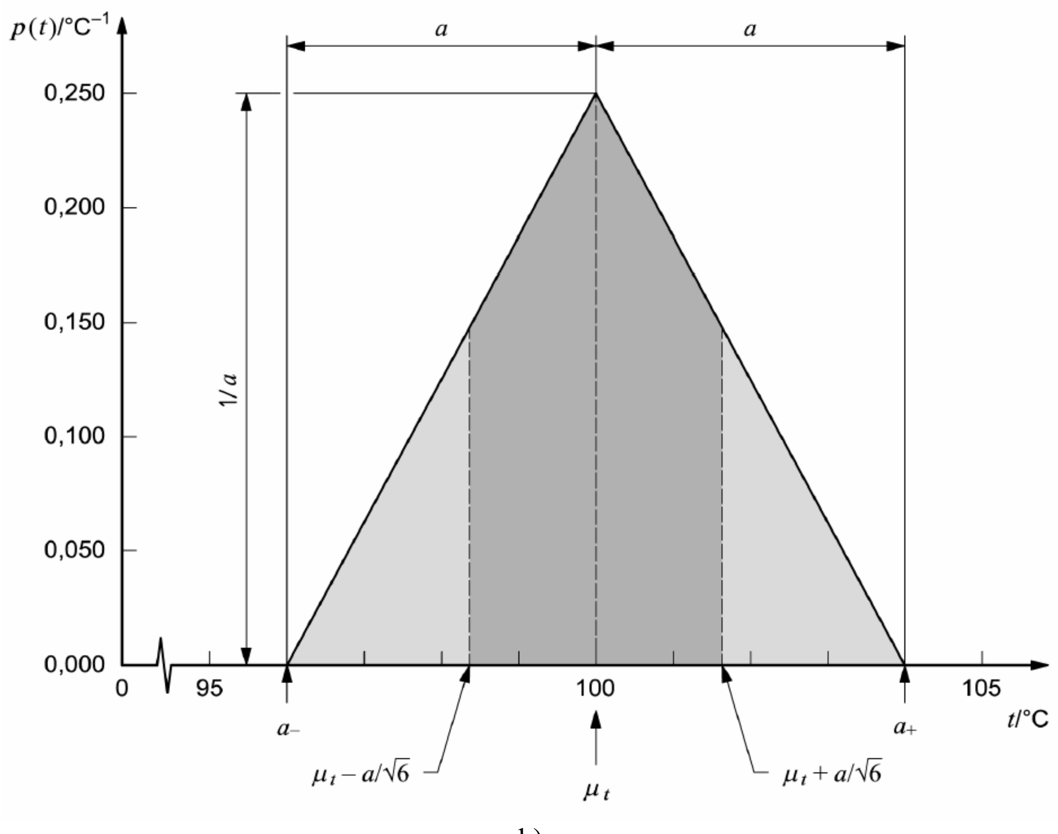


b)

Figura 1 —Representación gráfica de la evaluación de la incertidumbre típica de una magnitud de entrada, a partir de observaciones repetidas.



a)



b)

Figura 2 — Representación gráfica de la evaluación de la incertidumbre típica de una magnitud de entrada, a partir de una distribución supuesta *a priori*

4.4.4 La figura 2 representa la estimación del valor de una magnitud de entrada X_i y la evaluación de la incertidumbre de esta estimación, a partir de una distribución supuesta *a priori* de los valores posibles de X_i, o de una distribución de probabilidad de X_i basada en la totalidad de las informaciones disponibles. En los dos casos presentados, se supone de nuevo que la magnitud de entrada es una temperatura *t*.

4.4.5 En el caso ilustrado en la figura 2a, se supone que se tiene poca información sobre la magnitud de entrada *t* y que todo lo que puede hacerse es suponer que *t* se describe *a priori* por una distribución de probabilidad rectangular simétrica, de límite inferior $a_- = 96$ °C, y de límite superior $a_+ = 104$ °C, con una semiamplitud $a = (a_+ - a_-)/2 = 4$ °C (véase 4.3.7). La densidad de probabilidad de *t* es entonces:

$$p(t) = 1/2, \quad \text{para } a_- \leq t \leq a_+$$

$$p(t) = 0, \quad \text{para el resto de los casos.}$$

Como se indica en 4.3.7, la mejor estimación de *t* es su esperanza matemática $\mu_t = (a_+ + a_-)/2 = 100$ °C, según C.3.1. La incertidumbre típica de esta estimación es $u(\mu_t) = a / \sqrt{3} \approx 2{,}3$ °C, según C.3.2 [véase ecuación (7)].

4.4.6 Para el caso ilustrado en la figura 2b, se supone que la información disponible concerniente a *t* es menos limitada, pudiendo venir descrita *t a priori* por una distribución de probabilidad triangular simétrica, con el mismo límite inferior $a_- = 96$ °C, el mismo límite superior $a_+ = 104$ °C y, por tanto, la misma semiamplitud $a = (a_+ - a_-)/2 = 4$ °C que en 4.4.5 (véase 4.3.9). La densidad de probabilidad de *t* será entonces:

$$p(t) = (t - a_-)/a, \quad \text{para } a_- \leq t \leq (a_+ + a_-)/2$$

$$p(t) = (a_+ - t)/a^2, \quad \text{para } (a_+ + a_-)/2 \leq t \leq a_+$$

$$p(t) = 0, \quad \text{para el resto de los casos.}$$

Como se indica en 4.3.9, la esperanza matemática de *t* es $\mu_t = (a_+ + a_-)/2 = 100$ °C, según C.3.1. La incertidumbre típica de esta estimación es $u(\mu_t) = a/\sqrt{6} \approx 1{,}6$ °C, según C.3.2 [véase ecuación (9b)].

El valor anterior, $u(\mu_t) = 1{,}6$ °C, puede compararse con $u(\mu_t) = 2{,}3$ °C obtenida en 4.4.5 a partir de una distribución rectangular con la misma anchura de 8 °C; con $\sigma = 1{,}5$ °C de la distribución normal de la figura 1(a) cuyo intervalo, de $-2{,}58\sigma$ a $+2{,}58\sigma$, es casi 8 °C, lo que corresponde al 99 por ciento de la distribución; y con $u(\bar{t}) = 0{,}33$ °C, obtenida en 4.4.3 a partir de 20 observaciones, suponiendo que han sido obtenidas aleatoriamente a partir de la misma distribución normal.

5 Determinación de la incertidumbre típica combinada

5.1 Magnitudes de entrada no correlacionadas

Este apartado trata el caso en que todas las magnitudes de entrada son **independientes** (C.3.7). El caso en que existe una relación entre dos o más magnitudes de entrada; es decir, en que son dependientes entre sí o **correlacionadas** (C.2.8), se analiza en 5.2.

5.1.1 La incertidumbre típica de y, siendo y la estimación del mensurando Y; es decir, el resultado de medida, se obtiene componiendo adecuadamente las incertidumbres típicas de las estimaciones de entrada x_1, x_2, ..., x_N (véase 4.1). Esta *incertidumbre típica combinada* de la estimación y se nota como $u_c(y)$.

NOTA Por las mismas razones apuntadas en la nota de 4.3.1, en todos los casos se utilizan los símbolos $u_c(y)$ y $u_c^2(y)$.

5.1.2 La incertidumbre típica combinada $u_c(y)$ es la raíz cuadrada positiva de la varianza combinada $u_c^2(y)$, dada por:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^2 u^2(x_i) \tag{10}$$

donde f es la función dada en la ecuación (1). Cada $u(x_i)$ es una incertidumbre típica evaluada como se describe en 4.2 (evaluación Tipo A) o en 4.3 (evaluación Tipo B). La incertidumbre típica combinada $u_c(y)$ es una desviación típica estimada y caracteriza la dispersión de los valores que podrían ser razonablemente atribuidos al mensurando Y (véase 2.2.3).

La ecuación (10) y su equivalente para las magnitudes de entrada correlacionadas, ecuación (13), basadas ambas en un desarrollo en serie de Taylor de primer orden de $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$, expresan lo que en la *Guía* se denomina *ley de propagación de la incertidumbre* (véanse E.3.1 y E.3.2).

NOTA Cuando la no linealidad de f resulta significativa, es necesario incluir términos de orden más elevado en el desarrollo en serie de Taylor para la expresión de $u_c^2(y)$, ecuación (10). Cuando la distribución de cada X_i es simétrica alrededor de su media, los términos más importantes de orden inmediatamente superior que deben ser añadidos a los términos de la ecuación (10) son:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\,\partial x_j^2}\right] u^2(x_i)\,u^2(x_j)$$

Véase en H.1 un ejemplo de un caso donde es necesario tener en cuenta la contribución de los términos de orden superior en $u_c^2(y)$.

5.1.3 Las derivadas parciales $\partial f / \partial x_i$ son iguales a $\partial f / \partial X_i$, calculadas para $X_i = x_i$ (véase más abajo la nota 1). Estas derivadas, frecuentemente denominadas coeficientes de sensibilidad, describen cómo varía la estimación de salida y, en función de las variaciones en los valores de las estimaciones de entrada x_1, x_2, ..., x_N. En particular, la variación de y producida por una pequeña variación Δx_i en la estimación de entrada x_i viene dada por $(\Delta y)_i = (\partial f/\partial x_i)(\Delta x_i)$. Si esta variación es debida a la incertidumbre típica de la estimación x_i, la variación correspondiente de y es $(\partial f/\partial x_i)\, u(x_i)$. La varianza combinada $u_c^2(y)$ puede considerarse entonces como una suma de términos, cada uno de ellos representando la varianza estimada asociada a y, debido a la varianza estimada asociada a cada estimación de entrada x_i. Esto conduce a escribir la ecuación (10) en la forma

$$u_c^2(y) = \sum_{j=1}^{N} \left[c_i u(x_i)\right]^2 \equiv \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y) \tag{11a}$$

donde

$$c_i \equiv \partial f / \partial x_i, \qquad u_i(y) \equiv |c_i|\, u(x_i) \tag{11b}$$

NOTA 1 En rigor, las derivadas parciales son $\partial f / \partial x_i = \partial f / \partial X_i$, calculadas para las esperanzas matemáticas de las X_i. En la práctica, no obstante, las derivadas parciales se estiman mediante

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{x_1, x_2, \ldots, x_N}$$

NOTA 2 La incertidumbre típica combinada $u_c(y)$ puede calcularse numéricamente reemplazando $c_i u(x_i)$ en la ecuación (11a) por:

$$Z_i = \frac{1}{2}\{f[x_1,..., x_i + u(x_i),..., x_N] - f[x_1,..., x_i - u(x_i), ..., x_N]\}$$

Es decir, que $u_i(y)$ se evalúa numéricamente calculando la variación de y debida a variaciones de x_i, de valores $+u(x_i)$ y $-u(x_i)$. El valor de $u_i(y)$ puede entonces tomarse igual a $|Z_i|$ y el valor del coeficiente de sensibilidad correspondiente c_i igual a $Z_i/u(x_i)$.

EJEMPLO En el ejemplo de 4.1.1, simplificando la notación y utilizando el mismo símbolo para la magnitud y para su estimación,

$$c_1 \equiv \partial P / \partial V = 2V / \{R_0 [1 + \alpha(t - t_0)]\} = 2P / V$$

$$c_2 \equiv \partial P / \partial R_0 = -V^2 / \{R_0^2 [1 + \alpha(t - t_0)]\} = -P / R_0$$

$$c_3 \equiv \partial P / \partial \alpha = -V^2 (t - t_0) / \{R_0 [1 + \alpha(t - t_0)]^2\} = -P(t - t_0) / [1 + \alpha(t - t_0)]$$

$$c_4 \equiv \partial P / \partial t = -V^2 \alpha / \{R_0 [1 + \alpha(t - t_0)]^2\} = -P\alpha / [1 + \alpha(t - t_0)]$$

y

$$u^2(P) = \left[\frac{\partial P}{\partial V}\right]^2 u^2(V) + \left[\frac{\partial P}{\partial R_0}\right]^2 u^2(R_0) + \left[\frac{\partial P}{\partial \alpha}\right]^2 u^2(\alpha) + \left[\frac{\partial P}{\partial t}\right]^2 u^2(t) = [c_1 u(V)]^2 + [c_2 u(R_0)]^2 + [c_3 u(\alpha)]^2 + [c_4 u(t)]^2 =$$

$$= u_1^2(P) + u_2^2(P) + u_3^2(P) + u_4^2(P)$$

5.1.4 En lugar de calcularlos a partir de la función f, los coeficientes de sensibilidad $\partial f/\partial x_i$ pueden determinarse de forma experimental, midiendo la variación de Y producida por una variación de una X_i dada, manteniendo constantes las otras magnitudes de entrada. En este caso, el conocimiento de la función f (o de una parte de ella cuando únicamente se determinan de esta forma algunos coeficientes de sensibilidad) se reduce, en consecuencia, a un desarrollo empírico en serie de Taylor de primer orden, basado en los coeficientes de sensibilidad medidos.

5.1.5 Si la ecuación (1) para el mensurando Y se desarrolla en serie alrededor de los valores nominales $X_{i,0}$ de las magnitudes de entrada X_i, entonces, en el primer orden (que es habitualmente una aproximación adecuada), $Y = Y_0 + c_1\delta_1 + c_2\delta_2 + +... + c_N\delta_N$, donde $Y_0 = f(X_{1,0}, X_{2,0}, ..., X_{N,0})$, con los $c_i = (\partial f / \partial X_i)$, calculados para $X_i = X_{i,0}$, y $\delta_i = X_i - X_{i,0}$. De este modo, de cara a un análisis de incertidumbre, es habitual obtener una aproximación del mensurando mediante una función lineal de sus variables, transformando sus magnitudes de entrada X_i en δ_i (véase E.3.1).

EJEMPLO A partir del ejemplo 2 de 4.3.7, la estimación del valor del mensurando V es $V = \overline{V} + \Delta\overline{V}$, donde $\overline{V}$ = 0,928 571 V, $u(\overline{V})$ = 12 μV, la corrección aditiva $\Delta\overline{V}$ = 0, y $u(\Delta\overline{V})$ = 8,7 μV. Como $\partial V / \partial\overline{V} = 1$ y $\partial V / \partial(\Delta\overline{V}) = 1$, la varianza combinada asociada a V viene dada por:

$$u_c^2(V) = u^2(\overline{V}) + u^2(\Delta\overline{V}) = (12\ \mu\text{V})^2 + (8{,}7\ \mu\text{V})^2 = 219 \times 10^{-12}\ \text{V}^2$$

y la incertidumbre típica combinada es $u_c(V)$ = 15 μV, que corresponde a una incertidumbre típica combinada relativa $u_c(V)/V$ de 16 x 10^{-6} (véase 5.1.6). Este es un ejemplo en el que el mensurando es una función lineal de las magnitudes de las que depende, con los coeficientes c_i = +1. Se deduce de la ecuación (10) que si $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_NX_N$ y las constantes c_i = +1 ó -1, entonces:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u^2(x_i)$$

5.1.6 Si Y es de la forma $Y = cX_1^{p_1} X_2^{p_2} \ldots X_N^{p_N}$ y los exponentes p_i son números conocidos positivos o negativos, de incertidumbres despreciables, la varianza combinada, ecuación (10), puede expresarse como:

$$\left[u_{\mathrm{c}}(y)/y\right]^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[p_i u(x_i)/x_i\right]^2 \tag{12}$$

Esta expresión es similar a la ecuación (11a), pero con la varianza combinada $u_{\mathrm{c}}^2(y)$ expresada como *varianza combinada relativa* $[u_{\mathrm{c}}^2(y)/y]^2$ y la varianza estimada $u^2(x_i)$ asociada a cada estimación de entrada, expresada como una *varianza relativa* $[u(x_i)/x_i]^2$. [*La incertidumbre típica combinada relativa* es $u_{\mathrm{c}}(y)/|y|$ y *la incertidumbre típica relativa* de cada estimación de entrada es $u(x_i)/|x_i|$, $|y| \neq 0$ y $|x_i| \neq 0$].

NOTA 1 Cuando Y tiene esta forma, su transformación a una función lineal de variables (véase 5.1.5) se realiza fácilmente haciendo $X_i = X_{i,0}\,(1+\delta_i)$, resultando la siguiente aproximación: $(Y-Y_0)\,/\,Y_0 = \sum_{i=1}^{N} p_i\,\delta_i$. Por otro lado, la transformación logarítmica $Z = \ln Y$ y $W_i = \ln X_i$ conduce a una linearización exacta en función de las nuevas variables: $Z = \ln c + \sum_{i=1}^{N} p_i W_i$.

NOTA 2 Si cada p_i tiene el valor +1 ó -1, la ecuación (12) se transforma en $\left[u_{\mathrm{c}}(y)/y\right]^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[u(x_i)/x_i\right]^2$, lo que demuestra, para este caso particular, que la varianza combinada relativa asociada a la estimación y es simplemente igual a la suma de las varianzas relativas estimadas asociadas a las estimaciones de entrada x_i.

5.2 Magnitudes de entrada correlacionadas

5.2.1 La ecuación (10) y las derivadas de ella, tales como las ecuaciones (11a) y (12), son válidas solamente si las magnitudes de entrada X_i son independientes o no correlacionadas (las variables aleatorias, no las magnitudes físicas que se supone son invariables - véase 4.1.1, nota 1). Si algunas de las X_i están correlacionadas significativamente, es imprescindible tener en cuenta las correlaciones.

5.2.2 Cuando las magnitudes de entrada están correlacionadas, la expresión adecuada para la varianza combinada $u_{\mathrm{c}}^2(y)$ asociada al resultado de medida es

$$u_{\mathrm{c}}^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i,x_j) = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i,x_j) \tag{13}$$

donde x_i y x_j son las estimaciones de X_i y X_j, y $u(x_i,x_j) = u(x_j,x_i)$ es la covarianza estimada asociada a x_i y x_j. El grado de correlación entre x_i y x_j viene dado por el **coeficiente de correlación** estimado (C.3.6)

$$r(x_i,x_j) = \frac{u(x_i,x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \tag{14}$$

donde $r(x_i,x_j) = r(x_j,x_i)$ y $-1 \leq r(x_i,x_j) \leq +1$. Si las estimaciones x_i y x_j son independientes, $r(x_i,x_j) = 0$, y una variación en una de las dos no implica una variación en la otra. (Véase C.2.8, C.3.6 y C.3.7 para más información).

El término de covarianza de la ecuación (13) puede escribirse en función de los coeficientes de correlación, más fácilmente interpretables que las covarianzas, como:

$$2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i)u(x_j)r(x_i,x_j) \tag{15}$$

La ecuación (13), con ayuda de la ecuación (11b), se transforma entonces en

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j) \tag{16}$$

NOTA 1 En el caso muy particular en el que *todas* las estimaciones de entrada estén correlacionadas con coeficientes de correlación $r(x_i,x_j) = +1$, la ecuación (16) se reduce a:

$$u_c^2(y) = \left[\sum_{i=1}^{N} c_i u(x_i)\right]^2 = \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i)\right]^2$$

De esta forma, la incertidumbre típica combinada $u_c(y)$ es simplemente una *suma lineal* de términos que representan las variaciones de la estimación de salida y, generada por la incertidumbre típica $u(x_i)$ de cada estimación de entrada x_i (véase 5.1.3). [Esta suma lineal no debe ser confundida con la ley general de propagación del error, aunque esta tiene una forma similar; las incertidumbres típicas no son errores (véase E.3.2).]

EJEMPLO Diez resistencias, cada una de valor nominal R_i = 1000 Ω, se calibran con una incertidumbre despreciable de comparación, contra una resistencia patrón del mismo valor R_S = 1000 Ω, con una incertidumbre típica $u(R_S)$ = 100 mΩ según su certificado de calibración. Las resistencias se conectan en serie con cables de resistencia despreciable, para obtener una resistencia de referencia R_{ref}, de valor nominal 10 kΩ. Así, $R_{ref} = f(R_i) = \sum_{i=1}^{10} R_i$. Como $r(x_i,x_j) = r(R_i,R_j) = +1$ para cada par de resistencias (véase F.1.2.3, ejemplo 2), es aplicable la ecuación de esta nota. Puesto que para cada resistencia $\partial f/\partial x_i = \partial R_{ref}/\partial R_i = 1$, y $u(x_i) = u(R_i) = u(R_S)$ (véase F.1.2.3, ejemplo 2), la ecuación para la incertidumbre típica combinada de R_{ref} queda como $u_c(R_{ref}) = \sum_{i=1}^{10} u(R_S) =$ 10 x (100 mΩ) = 1 Ω. El resultado $u_c(R_{ref}) = \left[\sum_{i=1}^{10} u^2(R_S)\right]^{1/2} = 0{,}32\ \Omega$ obtenido de la ecuación (10) es incorrecto, ya que no tiene en cuenta que todos los valores de calibración de las diez resistencias están correlacionados.

NOTA 2 Las varianzas $u^2(x_i)$ y covarianzas $u(x_i, x_j)$ estimadas pueden considerarse como elementos de una matriz varianza-covarianza con elementos u_{ij}. Los elementos diagonales u_{ii} de la matriz son las varianzas $u^2(x_i)$, mientras que los elementos fuera de la diagonal u_{ij} ($i \neq j$) son las covarianzas $u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$. Si dos estimaciones de entrada no están correlacionadas, su covarianza asociada y los elementos correspondientes u_{ij} y u_{ji} de la matriz varianza-covarianza son cero. Si las estimaciones de entrada son todas *no correlacionadas*, todos los elementos fuera de la diagonal son cero y la matriz varianza-covarianza es diagonal (véase también C.3.5).

NOTA 3 A efectos de cálculo numérico, la ecuación (16) puede escribirse como:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} Z_i Z_j r(x_i, x_j)$$

donde Z_i viene dada en 5.1.3, nota 2.

NOTA 4 Si las X_i particulares tratadas en 5.1.6 están correlacionadas, entonces los términos

$$2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \left[p_i u(x_i)/x_i\right]\left[p_j u(x_j)/x_j\right] r(x_i, x_j)$$

deben añadirse al segundo miembro de la ecuación (12).

5.2.3 Consideremos dos medias aritméticas $\overline{q}$ y $\overline{r}$, que estiman las esperanzas matemáticas μ_q y μ_r de dos magnitudes q y r que varían aleatoriamente, y supongamos que $\overline{q}$ y $\overline{r}$ se calculan a partir de n pares independientes de observaciones simultáneas de q y r, realizadas en las mismas condiciones de medida (véase B.2.15). Entonces, la covarianza (véase C.3.4) de $\overline{q}$ y $\overline{r}$ viene estimada por

$$s(\overline{q}, \overline{r}) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}\left(q_k - \overline{q}\right)\left(r_k - \overline{r}\right) \tag{17}$$

donde q_k y r_k son las observaciones individuales de las magnitudes q y r, y donde $\overline{q}$ y $\overline{r}$ se calculan a partir de las observaciones, según la ecuación (3). Si las observaciones son realmente no correlacionadas, puede esperarse un valor de la covarianza calculada próximo a cero.

De esta forma, la covarianza estimada de dos magnitudes de entrada correlacionadas X_i y X_j, estimadas por sus medias $\overline{X}_i$ y $\overline{X}_j$, y determinadas a partir de pares independientes de observaciones simultáneas repetidas, viene dada por $u(x_i, x_j) = s(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$, con $s(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$ calculada según la ecuación (17). Esta aplicación de la ecuación (17) es una evaluación Tipo A de la covarianza. El coeficiente de correlación estimado de $\overline{X}_i$ y $\overline{X}_j$ se obtiene a partir de la ecuación (14): $r(x_i, x_j) = r(\overline{X}_i, \overline{X}_j) = s(\overline{X}_i, \overline{X}_j) / s(\overline{X}_i)s(\overline{X}_j)$.

NOTA En H.2 y H.4 se presentan dos ejemplos en los que es necesario utilizar covarianzas calculadas según la ecuación (17).

5.2.4 Puede existir una correlación significativa entre dos magnitudes de entrada si se utiliza, para su determinación, el mismo instrumento de medida, el mismo patrón o la misma referencia con incertidumbre típica significativa. Por ejemplo, si se utiliza un termómetro concreto para determinar una corrección de temperatura necesaria para estimar el valor de una magnitud de entrada X_i, y el mismo termómetro se utiliza para determinar una corrección de temperatura similar, necesaria para la estimación de la magnitud de entrada X_j, las dos magnitudes de entrada podrían estar correlacionadas de forma significativa. No obstante, si en este caso, X_i y X_j se redefinen como magnitudes no corregidas, y las magnitudes que definen la curva de calibración para el termómetro se incluyen como magnitudes de entrada adicionales, con incertidumbres típicas independientes, la correlación entre X_i y X_j desaparece (véase F.1.2.3 y F.1.2.4 para una presentación más completa).

5.2.5 Las correlaciones entre magnitudes de entrada no pueden ignorarse, siempre que existan y sean significativas. Las covarianzas asociadas deben evaluarse experimentalmente, si ello es posible, haciendo variar las magnitudes de entrada correlacionadas (véase C.3.6, nota 3) o utilizando el conjunto de informaciones disponibles acerca de la variabilidad correlacionada de las magnitudes en cuestión (evaluación Tipo B de la covarianza). La intuición basada en la experiencia y en el conocimiento general (véanse 4.3.1 y 4.3.2) es especialmente necesaria a la hora de estimar el grado de correlación entre dos magnitudes de entrada, derivado de efectos causados por influencias comunes, tales como la temperatura ambiente, la presión atmosférica y la humedad. Por suerte, en numerosos casos, los efectos de estas magnitudes de influencia presentan una dependencia mutua despreciable, y las magnitudes de entrada afectadas pueden suponerse no correlacionadas. Si no es posible hacer tal suposición, pueden evitarse estas correlaciones introduciendo las magnitudes de influencia comunes como magnitudes de entrada adicionales e independientes, tal como se indicó en 5.2.4.

6 Determinación de la incertidumbre expandida

6.1 Introducción

6.1.1 La Recomendación INC-1 (1980) del Grupo de Trabajo sobre la Expresión de las Incertidumbres, fundamento de la presente *Guía* (véase la Introducción), y las Recomendaciones 1 (CI-1981) y 1 (CI-1986) del CIPM que aprueban y confirman la INC-1 (1980) (véanse A.2 y A.3) abogan por la utilización de la incertidumbre típica combinada $u_c(y)$ como el parámetro para expresar cuantitativamente la incertidumbre del resultado de una medición. En efecto, el CIPM ha solicitado en la segunda de estas Recomendaciones que lo que ahora se denomina incertidumbre típica combinada $u_c(y)$ sea utilizada "por todos los participantes a la hora de expresar los resultados en comparaciones internacionales, y en otros trabajos efectuados bajo los auspicios del CIPM y de sus Comités Consultivos".

6.1.2 Aunque $u_c(y)$ puede ser utilizada universalmente para expresar la incertidumbre de un resultado de medida, frecuentemente es necesario, en ciertas aplicaciones comerciales, industriales o reglamentarias, o en los campos de la salud o la seguridad, dar una medida de la incertidumbre que defina, alrededor del resultado de medida, un intervalo en el interior del cual pueda esperarse encontrar gran parte de la distribución de valores que podrían ser razonablemente atribuidos al mensurando. El Grupo de Trabajo ha reconocido la existencia de esta exigencia y el punto 5 de la Recomendación INC-1 (1980) así lo manifiesta. La Recomendación 1 (CI-1986) del CIPM lo refleja igualmente.

6.2 Incertidumbre expandida

6.2.1 La nueva expresión de la incertidumbre, que satisface la exigencia de proporcionar un intervalo tal como el que se indica en 6.1.2, se denomina *incertidumbre expandida*, y se representa por U. La incertidumbre expandida U se obtiene multiplicando la incertidumbre típica combinada $u_c(y)$ por un *factor de cobertura* k:

$$U = k\, u_c(y) \tag{18}$$

Resulta conveniente expresar el resultado de una medición en la forma $Y = y \pm U$, lo que se interpreta como que la mejor estimación del valor atribuible al mensurando Y es y, y que puede esperarse que en el intervalo que va de $y - U$ a $y + U$ esté comprendida una fracción importante de la distribución de valores que podrían ser razonablemente atribuidos a Y. Tal intervalo puede también expresarse por $y - U \le Y \le y + U$.

6.2.2 Los conceptos **intervalo de confianza** (C.2.27, C.2.28) y **nivel de confianza** (C.2.29) tienen definiciones específicas en estadística y se aplican solamente al intervalo definido por U cuando se cumplen ciertas condiciones, incluida la de que todas las componentes de la incertidumbre que contribuyen a $u_c(y)$ se obtengan mediante evaluaciones Tipo A. En consecuencia, en esta *Guía* no se utiliza el término "confianza" para calificar el término "intervalo" referido al intervalo definido por U; de la misma forma, tampoco se utiliza el concepto "nivel de confianza" en conexión con dicho intervalo. Más específicamente, U define, alrededor del resultado de medición, un intervalo que comprende una fracción elevada p de la distribución de probabilidad representada por este resultado y su incertidumbre típica combinada, siendo p la *probabilidad* o *nivel de confianza* del intervalo.

6.2.3 Siempre que sea posible, debe estimarse e indicarse el nivel de confianza p asociado al intervalo definido por U. Debe tenerse en cuenta que el hecho de multiplicar $u_c(y)$ por una constante no añade información nueva, sino que presenta en forma diferente la información previamente disponible. Sin embargo, también debe tenerse en cuenta que, en numerosos casos, el nivel de confianza p (especialmente para valores de p cercanos a 1) es bastante incierto, no solamente debido al limitado conocimiento de la distribución de probabilidad representada por y y por $u_c(y)$ (particularmente en las regiones extremas), sino también por causa de la propia incertidumbre de $u_c(y)$ (véase nota 2 de 2.3.5, 6.3.2, 6.3.3 y anexo G, en particular G.6.6).

NOTA Las formas preferibles para presentar el resultado de una medición, según que la incertidumbre venga expresada por $u_c(y)$ o por U, pueden verse respectivamente en 7.2.2 y 7.2.4.

6.3 Elección del factor de cobertura

6.3.1 El valor del factor de cobertura k se elige en función del nivel de confianza requerido para el intervalo $y - U$ a $y + U$. En general, k toma un valor entre 2 y 3. No obstante, en aplicaciones especiales, k puede tomarse fuera de dicho margen de valores. La experiencia y el conocimiento amplio sobre la utilización de los resultados de medida pueden facilitar la elección de un valor conveniente para k.

NOTA Ocasionalmente, puede suceder que una corrección conocida b de un efecto sistemático no haya sido aplicada al resultado de medida, sino que se haya tratado de tener en cuenta el posible efecto, expandiendo la incertidumbre asociada al resultado. Esta práctica debe evitarse. El hecho de no aplicar la corrección al resultado de una medición, en el caso de un efecto sistemático significativo conocido, debería reservarse únicamente para circunstancias muy especiales (véase en F.2.4.5 un caso específico y su tratamiento). No debe confundirse la evaluación de la incertidumbre de un resultado de medida con la atribución de un límite de seguridad a una magnitud dada.

6.3.2 Idealmente, debería poderse escoger un valor específico del factor de cobertura k que proporcionase un intervalo $Y = y \pm U = y \pm k\, u_c(y)$ correspondiente a un nivel de confianza particular p, por ejemplo, un 95 o un 99 por ciento y, de forma equivalente, para un valor dado de k, debería ser posible enunciar de forma inequívoca el nivel de confianza asociado a dicho intervalo. Sin embargo, no es fácil lograr esto en la práctica puesto que se requiere un conocimiento amplio de la distribución de probabilidad caracterizada por el resultado de medida y, y su incertidumbre típica combinada $u_c(y)$. Aunque estos parámetros son de importancia crítica, sin embargo no son suficientes por sí mismos para poder establecer intervalos con niveles de confianza exactamente conocidos.

6.3.3 La Recomendación INC-1 (1980) no especifica cómo debe establecerse la relación entre k y p. Este problema se analiza en el anexo G, presentándose un método recomendado para su solución aproximada en G.4, y un método resumido en G.6.4. No obstante, una propuesta más sencilla, analizada en G.6.6, es a menudo adecuada para series de mediciones donde la distribución de la probabilidad representada por y y $u_c(y)$ es aproximadamente normal, y el número de grados efectivos de libertad de $u_c(y)$ es significativo. Cuando este es el caso, frecuente en la práctica, se puede suponer que $k = 2$ representa un intervalo con un nivel de confianza de aproximadamente el 95 por ciento, y que $k = 3$ representa un intervalo con un nivel de confianza de aproximadamente el 99 por ciento.

NOTA Un método para la estimación del número de grados efectivos de libertad de $u_c(y)$ se presenta en G.4. La tabla G.2 del anexo G puede utilizarse como ayuda para decidir si esta solución es apropiada para una medición en particular (véase G.6.6).

7 Expresión de la incertidumbre

7.1 Directrices generales

7.1.1 En general, a medida que se asciende en la jerarquía de la medición, se requieren más detalles sobre la forma en que han sido obtenidos el resultado de medida y su incertidumbre. Sin embargo, en todos los niveles jerárquicos (actividades comerciales y reglamentarias sobre los mercados, ingeniería en la industria, instalaciones de calibración de bajo nivel, investigación y desarrollo industrial, investigación fundamental, patrones primarios y patrones de calibración industrial, laboratorios nacionales y BIPM) toda la información necesaria para poder evaluar el proceso de medición debe estar a disposición de todos aquellos que puedan necesitarla. La principal diferencia se refiere a que en los niveles inferiores de la cadena jerárquica, mucha de la información necesaria puede estar disponible, publicada como informes sobre métodos de calibración o ensayo, especificaciones de ensayo, certificados de calibración y ensayo, manuales de instrucciones, normas internacionales o nacionales y reglamentaciones locales.

7.1.2 Cuando se proporcionan los detalles de una medición, incluyendo la forma de evaluar la incertidumbre del resultado, por referencia a documentos publicados, como es el caso frecuente de un certificado que incluye los resultados de calibración, es imperativo que dichos documentos estén actualizados, a fin de que sean compatibles con el procedimiento de medida aplicado.

7.1.3 Diariamente se efectúan numerosas mediciones tanto en la industria como en el comercio, sin ningún informe explícito de incertidumbre. Muchas de ellas son además efectuadas con instrumentos sujetos a calibración periódica o a inspección legal. Si se admite que los instrumentos cumplen sus especificaciones u otros documentos normativos existentes que les sean de aplicación, pueden deducirse las incertidumbres de sus indicaciones a partir de dichas especificaciones o de dichos documentos normativos.

7.1.4 Aunque en la práctica, la cantidad de información necesaria para documentar un resultado de medida depende de la utilización prevista, sin embargo se mantiene el principio básico de que cuando se indica el resultado de medida y su incertidumbre, es mejor pecar por exceso de información que por defecto. Por ejemplo, se debe(n):

a) describir claramente los métodos utilizados para calcular el resultado de medida y su incertidumbre, a partir de las observaciones experimentales y datos de entrada;

b) listar todas las componentes de la incertidumbre, documentando totalmente la forma en que se han evaluado;

c) presentar el análisis de los datos de forma que pueda seguirse fácilmente cada una de sus etapas, y que pueda repetirse de forma independiente, si es necesario, el cálculo del resultado obtenido;

d) dar todas las correcciones y constantes utilizadas para el análisis, así como las fuentes utilizadas.

Una comprobación de la lista precedente consiste en preguntarse uno mismo "¿He proporcionado suficiente información, en forma lo bastante clara, para que mi resultado pueda ser actualizado posteriormente, si se dispone de nuevas informaciones o nuevos datos?"

7.2 Directrices específicas

7.2.1 Cuando se expresa el resultado de una medición, y la medida de su incertidumbre viene dada por medio de su incertidumbre típica combinada $u_c(y)$, se debe:

a) describir completamente la forma en que se ha definido el mensurando Y;
b) dar la estimación y del mensurando Y, y su incertidumbre típica combinada u_c(y), indicando siempre las unidades utilizadas para y y para $u_c(y)$;

c) aportar la incertidumbre típica combinada relativa $u_c(y)/|y|$, $|y| \neq 0$, cuando proceda;

d) proporcionar la información que se describe en 7.2.7, o hacer referencia a algún documento que la incluya.

Si se considera útil para posibles usuarios del resultado de medida; por ejemplo, para facilitar cálculos posteriores de factores de cobertura, o para ayudar a entender la medición, puede(n) indicarse:

- la estimación del número efectivo de grados de libertad ν_{eff} (véase G.4);
- las incertidumbres típicas combinadas Tipo A, $u_{cA}(y)$, y Tipo B, $u_{cB}(y)$, así como sus grados efectivos de libertad estimados, ν_{effA} y ν_{effB} (véase G.4.1, nota 3).

7.2.2 Cuando la incertidumbre de medida viene dada por $u_c(y)$, para evitar cualquier falsa interpretación, es preferible dar el resultado numérico de la medición mediante una de las cuatro formas siguientes. (Se supone que la magnitud cuyo valor se expresa es un patrón de masa m_S, de valor nominal 100 g; las informaciones entre paréntesis pueden omitirse para mayor concisión, siempre que u_c se defina en cualquier parte del documento que expresa el resultado).

1) "m_S = 100,021 47 g, con (una incertidumbre típica combinada) u_c = 0,35 mg".
2) "m_S = 100,021 47(35) g, donde el número entre paréntesis es el valor numérico de (la incertidumbre típica combinada) u_c referida a las dos últimas cifras del resultado dado".
3) "m_S = 100,021 47(0,000 35) g, donde el número entre paréntesis es el valor numérico de (la incertidumbre típica combinada) u_c, expresada en la misma unidad que el resultado dado".
4) "m_S = (100,021 47 ± 0,000 35) g, donde el número que sigue al símbolo ± es el valor numérico de (la incertidumbre típica combinada) u_c y no un intervalo de confianza".

NOTA La forma con ± debe evitarse en lo posible, ya que habitualmente se utiliza para indicar un intervalo correspondiente a un nivel alto de confianza, y puede confundirse con la incertidumbre expandida (véase 7.2.4). Además, aunque la finalidad de la advertencia en 4) es prevenir tal confusión, el hecho de escribir $Y = y \pm u_c(y)$ podría malinterpretarse, pudiendo entenderse, sobre todo si se omite accidentalmente el final de la frase de la advertencia, que se refiere a una incertidumbre expandida con k = 1, y que el intervalo $y - u_c(y) \leq Y \leq y + u_c(y)$ tiene un nivel de confianza específico p; es decir, aquel asociado a la distribución normal (véase G.1.3). Como se indica en 6.3.2 y en el anexo G, esta interpretación de $u_c(y)$ es habitualmente difícil de justificar.

7.2.3 Cuando al resultado de una medición se acompaña la incertidumbre expandida $U = k\, u_c(y)$, se debe:

a) describir completamente la forma en que se ha definido el mensurando Y;
b) indicar el resultado de la medición en la forma $Y = y \pm U$, y dar las unidades de y, y de U;
c) incluir la incertidumbre expandida relativa $U/|y|$, $|y| \neq 0$, cuando proceda;
d) dar el valor de k utilizado para obtener U [o, para facilitar al usuario el resultado, proporcionar tanto el valor de k como el de $u_c(y)$];
e) dar el nivel de confianza aproximado asociado al intervalo $y \pm U$, e indicar cómo se ha determinado;
f) proporcionar la información que se describe en 7.2.7, o hacer referencia a algún documento que la incluya.

7.2.4 Cuando la incertidumbre de medida viene dada por U, es preferible, para mayor claridad, indicar el resultado numérico de la medición como en el siguiente ejemplo. (Las informaciones entre paréntesis pueden omitirse para mayor concisión, siempre que U, u_c y k aparezcan definidas en el documento que expresa el resultado).

> "m_S = (100,021 47 ± 0,000 79) g, donde el número que sigue al símbolo ± es el valor numérico de $U = k\, u_c$ (incertidumbre expandida), con U determinada a partir de u_c = 0,35 mg (incertidumbre típica combinada), y de k = 2,26 (factor de cobertura), basado en la distribución t de Student para ν = 9 grados de libertad, definiendo un intervalo estimado para tener un nivel de confianza del 95 por ciento".

7.2.5 Si una medición determina simultáneamente más de un mensurando; es decir, si proporciona dos o más estimaciones de salida y_i (véanse H.2, H.3 y H.4), es necesario dar entonces, además de y_i y $u_c(y_i)$, los elementos $u(y_i, y_j)$ de la matriz de covarianza, o los elementos $r(y_i, y_j)$ de la matriz de coeficientes de correlación (C.3.6, nota 2) (y preferiblemente ambos).

7.2.6 Los valores numéricos de la estimación de y y de su incertidumbre típica combinada $u_c(y)$ o de su incertidumbre expandida U no deben darse con un número excesivo de cifras. Habitualmente basta con dar $u_c(y)$ y U [así como las incertidumbres típicas $u(x_i)$ de las estimaciones de entrada x_i] con dos cifras significativas, aunque en ciertos casos, pueda ser necesario mantener cifras suplementarias para evitar la propagación de errores de redondeo en cálculos posteriores.

A la hora de dar los resultados finales, puede ser adecuado redondear las incertidumbres por exceso, mejor que a la cifra más próxima. Por ejemplo, $u_c(y)$ = 10,47 mΩ podría redondearse a 11 mΩ. No obstante, deberá prevalecer el sentido común, y un valor tal como $u(x_i)$ = 28,05 kHz deberá redondearse al valor inferior 28 kHz. Las estimaciones de entrada y de salida deben redondearse de acuerdo con sus incertidumbres; por ejemplo, si y = 10,057 62 Ω, con $u_c(y)$ = 27 mΩ, y deberá redondearse a 10,058 Ω. Los coeficientes de correlación deberán darse con tres cifras significativas, cuando sus valores absolutos sean próximos a la unidad.

7.2.7 En el informe detallado que describe el modo de obtención del resultado de una medición y de su incertidumbre, deben seguirse las recomendaciones dadas en 7.1.4 y, en consecuencia:

a) dar el valor de cada estimación de entrada x_i y de su incertidumbre típica $u(x_i)$, junto con una descripción de cómo han sido obtenidas;

b) dar las covarianzas estimadas, o los coeficientes de correlación estimados (preferiblemente ambas cosas), asociados a todas las estimaciones de entrada que están correlacionadas, así como los métodos utilizados para su obtención;

c) dar los grados de libertad de la incertidumbre típica de cada estimación de entrada, y su forma de obtención;

d) indicar la función $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$ y, cuando se juzgue útil, las derivadas parciales o coeficientes de sensibilidad $\partial f/\partial x_i$. Si alguno de estos coeficientes ha sido obtenido experimentalmente, debe incluirse también su proceso de obtención.

NOTA Puesto que la función f puede ser extremadamente compleja, o puede no existir en forma explícita, sino únicamente como un programa de ordenador, algunas veces no es posible dar f y sus derivadas. Puede entonces describirse la función f en términos generales, o indicar el programa utilizado, con ayuda de las referencias apropiadas. En estos casos, es importante presentar claramente la forma en que han sido obtenidas tanto la estimación y del mensurando Y como su incertidumbre típica combinada $u_c(y)$.

8 Resumen del procedimiento de evaluación y expresión de la incertidumbre

Las etapas a seguir para evaluar y expresar la incertidumbre del resultado de una medición, tal como se presentan en la *Guía*, pueden resumirse como sigue:

1) Expresar matemáticamente la relación existente entre el mensurando Y y las magnitudes de entrada X_i de las que depende Y según $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$. La función f debe contener todas las magnitudes, incluyendo todas las correcciones y factores de corrección que pueden contribuir significativamente a la incertidumbre del resultado de medición (véanse puntos 4.1.1 y 4.1.2).

2) Determinar x_i, el valor estimado de la magnitud de entrada X_i, bien a partir del análisis estadístico de una serie de observaciones, bien por otros métodos (véase 4.1.3).

3) Evaluar la *incertidumbre típica* $u(x_i)$ de cada estimación de entrada x_i. Para una estimación de entrada obtenida por análisis estadístico de series de observaciones, la incertidumbre típica se evalúa tal como se describe en 4.2 (*evaluación Tipo A de la incertidumbre típica*). Para una estimación de entrada obtenida por otros medios, la incertidumbre típica $u(x_i)$ se evalúa tal como se describe en 4.3 (*evaluación Tipo B de la incertidumbre típica*).

4) Evaluar las covarianzas asociadas a todas las estimaciones de entrada que estén correlacionadas (véase 5.2).

5) Calcular el resultado de medición; esto es, la estimación y del mensurando Y, a partir de la relación funcional f utilizando para las magnitudes de entrada X_i las estimaciones x_i obtenidas en el paso 2 (véase 4.1.4).

6) Determinar *la incertidumbre típica combinada* $u_c(y)$ del resultado de medida y, a partir de las incertidumbres típicas y covarianzas asociadas a las estimaciones de entrada, tal como se describe en el capítulo 5 de la *Guía*. Si la medición determina simultáneamente más de una magnitud de salida, calcular sus covarianzas (véanse 7.2.5, H.2, H.3 y H.4).

7) Si es necesario dar una *incertidumbre expandida* U, cuyo fin es proporcionar un intervalo $[y - U, y + U]$ en el que pueda esperarse encontrar la mayor parte de la distribución de valores que podrían, razonablemente, ser atribuidos al mensurando Y, multiplicar la incertidumbre típica combinada $u_c(y)$ por un factor de cobertura k, normalmente comprendido en un margen de valores entre 2 y 3, para obtener $U= k\, u_c(y)$. Seleccionar k considerando el nivel de confianza requerido para el intervalo (véanse 6.2, 6.3 y especialmente el anexo G que presenta la elección de un valor de k que proporciona un intervalo con un nivel de confianza próximo a un valor especificado).

8) Documentar el resultado de medición y, junto con su incertidumbre típica combinada $u_c(y)$, o su incertidumbre expandida U, siguiendo las indicaciones dadas en los puntos 7.2.1 o 7.2.3 de la *Guía*. Utilizar una de las formas de expresión recomendadas en 7.2.2 o 7.2.4. Describir tambien, tal como se indica en el capítulo 7, cómo han sido obtenidos los valores de y y de $u_c(y)$ o U.

Anexo A

Recomendaciones del Grupo de Trabajo y del CIPM

A.1 Recomendación INC-1 (1980)

El Grupo de Trabajo sobre la Expresión de las Incertidumbres (véase Prólogo) se reunió en octubre de 1980 por iniciativa de la Oficina Internacional de Pesas y Medidas (BIPM), en respuesta a una solicitud del Comité Internacional de Pesas y Medidas (CIPM). El grupo preparó un informe detallado para someterlo a consideración del CIPM, el cual concluye con la Recomendación INC-1 (1980) [2]. La traducción al español de esta Recomendación se facilita en el punto 0.7 de la presente *Guía*, y el texto en francés, que es la versión oficial autorizada, se reproduce a continuación [2].

Expression des incertitudes expérimentales

Recommandation INC-1 (1980)

1) L'incertitude d'un résultat de mesure comprend généralement plusieurs composantes qui peuvent être groupées en deux catégories d'après la méthode utilisée pour estimer leur valeur numérique:

   A. celles qui sont évaluées à l'aide de méthodes statistiques,

   B. celles qui sont évaluées par d'autres moyens.

   Il n'y a pas toujours une correspondance simple entre le classement dans les catégories A ou B et le caractère «aléatoire» ou «systématique» utilisé antérieurment pour classer les incertitudes. L'expression «incertitude systématique» est susceptible de conduire à des erreurs d'interprétation; elle doit être évitée.

   Toute description détaillée de l'incertitude devrait comprendre une liste complète de ses composantes et indiquer pour chacune la méthode utilisée pour lui attribuer une valeur numérique.

2. Les composantes de la catégorie A sont caractérisées par les variances estimées s_i^2 (ou les «écarts-types» estimés s_i) et les nombres ν_i de degrés de liberté. Le cas échéant, les covariances estimées doivent être données.

3. Les composantes de la catégorie B devraient être caractérisées par des termes u_j^2, qui puissent être considérés comme des approximations des variances correspondantes dont on admet l'existence. Les termes u_j^2 peuvent être traités comme des variances et les termes u_j comme des écarts-types. Le cas échéant, les covariances doivent être traitées de façon analogue.

4. L'incertitude composée devrait être caractérisée par la valeur obtenue en appliquant la méthode usuelle de combinaison des variances. L'incertitude composée ainsi que ses composantes devraient être exprimées sous la forme d' «écart-types».

5. Si pour des utilisations particulières on est amené à multiplier par un facteur l'incertitude composée afin d'obtenir une incertitude globale, la valeur numérique de ce facteur doit toujours être donée.

A.2 Recomendación 1 (CI-1981)

El CIPM examinó el informe que le remitió el Grupo de Trabajo sobre la Expresión de las Incertidumbres y adoptó la siguiente recomendación en su 70ª reunión celebrada en octubre de 1981 [3]:

Recomendación 1 (CI-1981)

Expresión de las incertidumbres experimentales

El Comité Internacional de Pesas y Medidas,

considerando

- la necesidad de encontrar una forma consensuada para expresar la incertidumbre de medida en metrología,
- los esfuerzos tendentes a este fin, realizados por diversos organismos durante numerosos años,
- los progresos realizados hacia una solución aceptable que han resultado de las discusiones del Grupo de Trabajo sobre la Expresión de las Incertidumbres, reunido en el BIPM en 1980,

reconoce

- que las propuestas del Grupo de Trabajo podrían constituir la base para un acuerdo provisional sobre la expresión de las incertidumbres,

recomienda

- que las propuestas de este Grupo de Trabajo sean difundidas ampliamente;
- que el BIPM se esfuerce en aplicar los principios contenidos en estas propuestas, en las comparaciones internacionales que organice bajo sus auspicios en el futuro;
- que otros organismos interesados estudien y sometan a prueba estas propuestas, y hagan llegar al BIPM sus observaciones;
- que en un plazo de dos o tres años el BIPM informe de nuevo sobre la marcha de la aplicación de estas propuestas.

A.3 Recomendación 1 (CI-1986)

El CIPM examinó el tema de la expresión de las incertidumbres en su 75ª reunión celebrada en octubre de 1986, y adoptó la siguiente recomendación [4]:

Recomendación 1 (CI-1986)

Expresión de las incertidumbres en los trabajos efectuados bajo los auspicios del CIPM

El Comité Internacional de Pesas y Medidas,

considerando la adopción de la Recomendación INC-1 (1980) por el Grupo de Trabajo sobre la Expresión de las Incertidumbres y la adopción de la Recomendación 1 (CI-1981) por el CIPM ,

considerando que ciertos miembros de los Comités Consultivos pueden desear un esclarecimiento de esta Recomendación de cara a las necesidades de trabajo que les incumban, en particular en las comparaciones internacionales, *reconoce* que el párrafo 5 de la Recomendación INC-1 (1980), relativa a aplicaciones particulares, especialmente aquellas que tienen una importancia comercial, ahora está siendo tratado por un grupo de trabajo común formado por la Organización Internacional de Normalización (ISO), la Organización Internacional de Metrología Legal, OIML y la Comisión Electrotécnica Internacional, IEC, con la participación y cooperación del CIPM,

insta a que el párrafo 4 de la Recomendación INC-1 (1980) debe ser aplicado por todos los participantes al dar los resultados de comparaciones internacionales y de otros trabajos efectuados bajo los auspicios del CIPM y de sus Comités Consultivos, y que la incertidumbre combinada resultante de las componentes Tipo A y Tipo B, se exprese en forma de *una desviación típica*.

Anexo B

Términos metrológicos generales

B.1 Origen de las definiciones

Las definiciones de los términos metrológicos generales relacionados con esta *Guía* y que se ofrecen aquí, están tomadas del *International vocabulary of basic and general terms in metrology* - (abreviadamente VIM), 2ª edición, 1993[1] [6], publicado por la Organización Internacional de Normalización (ISO), en nombre de las siete organizaciones que apoyaron su desarrollo y nombraron los expertos que lo prepararon: la Oficina Internacional de Pesas y Medidas (BIPM), la Comisión Electrotécnica Internacional (IEC), la Federación Internacional de Química Clínica (IFCC), la propia ISO, la Unión Internacional de Química Pura y Aplicada (IUPAC), la Unión Internacional de Física Pura y Aplicada (IUPAP), y la Organización Internacional de Metrología Legal (OIML). El VIM debe ser la primera fuente a consultar para las definiciones de los términos no incluidos en el presente Anexo o en el texto de la Guía.

NOTA Algunos términos y conceptos estadísticos básicos se presentan en el anexo C, mientras que los términos "valor verdadero", "error" e "incertidumbre" se discuten posteriormente en el anexo D.

B.2 Definiciones

Al igual que en el Capítulo 0, en las definiciones que siguen, la utilización del paréntesis en torno a ciertas palabras de algunos términos significa que dichas palabras pueden ser omitidas, si ello no crea confusión.

Los términos en negrita, de algunas notas, son términos metrológicos adicionales definidos en dichas notas, explícita o implícitamente (véase referencia [6]).

B.2.1 magnitud (mensurable)

atributo de un fenómeno, cuerpo o sustancia, que es susceptible de ser distinguido cualitativamente y determinado cuantitativamente

NOTA 1 El término magnitud puede referirse a una magnitud en el sentido general (véase ejemplo 1), o a una **magnitud particular** (véase ejemplo 2).

EJEMPLO 1 Magnitudes en sentido general: longitud, tiempo, masa, temperatura, resistencia eléctrica, concentración en cantidad de sustancia.

EJEMPLO 2 Magnitudes particulares:

- longitud de una varilla determinada
- resistencia eléctrica de un hilo conductor determinado
- concentración en cantidad de sustancia de etanol en una muestra dada de vino.

NOTA 2 Las magnitudes que pueden ser clasificadas unas respecto a otras en orden relativo (creciente o decreciente) se denominan **magnitudes de la misma naturaleza**.

NOTA 3 Las magnitudes de la misma naturaleza pueden agruparse juntas en **categorías de magnitudes**, por ejemplo:

- trabajo, calor, energía
- espesor, circunferencia, longitud de onda.

---

[1] **Nota de la versión 2008:**
La 3ª edición del vocabulario se publicó en 2008 bajo el titulo JCGM 200:2008, *Internacional vocabulary of metrology ─ Basic and general concepts and associated terms (VIM). Su traducción al español se publicó en 2008 bajo el titulo "Vocabulario Internacional de Metrología - Conceptos fundamentales y generales y términos asociados"*

NOTA 4 Los símbolos de las magnitudes se establecen en la ISO 31*

[VIM: 1993, definición 1.1]

B.2.2 valor (de una magnitud)

expresión cuantitativa de una magnitud particular, generalmente en forma de una unidad de medida multiplicada por un número

EJEMPLO 1 Longitud de una varilla: 5,34 m ó 534 cm.

EJEMPLO 2 Masa de un cuerpo: 0,152 kg ó 152 g.

EJEMPLO 3 Cantidad de sustancia de una muestra de agua (H_2O): 0,012 mol ó 12 mmol.

NOTA 1 El valor de una magnitud puede ser positivo, negativo o cero.

NOTA 2 El valor de una magnitud puede expresarse de más de una forma.

NOTA 3 Los valores de magnitudes de dimensión uno se expresan generalmente como números puros.

NOTA 4 Ciertas magnitudes para las que no se puede definir su relación con la unidad, pueden expresarse por referencia a una escala convencional de referencia o a un procedimiento de medida especificado, o ambos.

[VIM: 1993, definición 1.18]

B.2.3 valor verdadero (de una magnitud)

valor en consistencia con la definición de una magnitud particular dada

NOTA 1 Es un valor que se obtendría mediante una medición perfecta.

NOTA 2 Todo valor verdadero es por naturaleza indeterminado.

NOTA 3 Es mejor utilizar en conjunción con “valor verdadero” el artículo indefinido “un” que el artículo definido “el”, porque el valor verdadero puede tener varios valores que se correspondan con la definición de una magnitud particular dada.

[VIM: 1993, definición 1.19]

Comentario de la *Guía*: Véase el Anexo D, en particular D.3.5, para determinar las razones por las que el término “valor verdadero” no se utiliza en la *Guía*, y por las que los términos “valor verdadero de un mensurando” (o de una magnitud) y “valor de un mensurando” (o de una magnitud) se consideran como equivalentes.

B.2.4 valor convencionalmente verdadero (de una magnitud)

valor atribuido a una magnitud particular y aceptado, a veces por convenio, como teniendo una incertidumbre apropiada para un uso dado

EJEMPLO 1 En un lugar dado, el valor atribuido a la magnitud realizada por un patrón de referencia puede ser tomado como un valor convencionalmente verdadero.

EJEMPLO 2 El valor de la constante de Avogadro, N_A: 6,022 136 7 x 10^{23} mol^{-1}, recomendado por CODATA (1986).

NOTA 1 El “valor convencionalmente verdadero” es denominado a veces, **valor asignado**, **mejor estimación** del valor, **valor convencional** o **valor de referencia**. En este sentido, el término “valor de referencia” no debe confundirse con el mismo término utilizado en el mismo sentido utilizado en la nota del punto 5.7.

NOTA 2 A menudo se utiliza un gran número de resultados de medidas de una magnitud para establecer un valor convencionalmente verdadero.

[VIM: 1993, definición 1.20]

Comentario de la *Guía*: Véase el comentario de la *Guía* a B.2.3.

B.2.5 medición

conjunto de operaciones que tienen por finalidad determinar un valor de una magnitud

* **Nota a la versión 2008:**
La serie de normas ISO 31 se encuentran en revisión pasando a ser la serie de documentos ISO 80000 e IEC 80000. (Algunos de estos documentos ya se han publicado)

NOTA El desarrollo de las operaciones puede ser automático.

[VIM: 1993, definición 2.1]

B.2.6 principio de medida
base científica de una medición

EJEMPLO 1 El efecto termoeléctrico utilizado para la medición de temperatura.

EJEMPLO 2 El efecto Josephson utilizado para la medición de la tensión eléctrica.

EJEMPLO 3 El efecto Doppler utilizado para la medición de la velocidad.

EJEMPLO 4 El efecto Raman utilizado para la medición del número de ondas de las vibraciones moleculares.

[VIM: 1993, definición 2.3]

B.2.7 método de medida
sucesión lógica de operaciones, descritas de una forma genérica, utilizadas en la ejecución de las mediciones

NOTA El método de medida puede ser clasificado de diversas formas tales como:

- método de substitución
- método diferencial
- método de cero

[VIM: 1993, definición 2.4]

B.2.8 procedimiento de medida
conjunto de operaciones, descritas de forma específica, utilizadas en la ejecución de mediciones particulares, conforme a un método dado

NOTA Un procedimiento de medida esta habitualmente descrito en un documento a menudo él mismo denominado "procedimiento de medida" (o "método de medida"), que da suficientes detalles para que un operador pueda efectura una medición sin necesidad de otras informaciones.

[VIM: 1993, definición 2.5]

B.2.9 mensurando
magnitud particular sometida a medición

EJEMPLO Presión de vapor de una muestra dada de agua, a 20 °C.

NOTA La definición de un mensurando puede necesitar indicaciones relativas a magnitudes tales como el tiempo, la temperatura y la presión.

[VIM: 1993, definición 2.6]

B.2.10 magnitud de influencia
magnitud que no es el mensurando, pero que tiene un efecto sobre el resultado de la medición

EJEMPLO 1 temperatura de un micrómetro en la medida de una longitud.

EJEMPLO 2 frecuencia, en la medida de la amplitud de una tensión eléctrica alterna.

EJEMPLO 3 concentración en bilirrubina en la medida de la concentración de hemoglobina en una muestra de plasma sanguíneo humano.

[VIM: 1993, definición 2.7]

Comentario de la *Guía*: Se entiende que la definición de magnitud de influencia incluye valores asociados a los patrones de medida, a los materiales de referencia y a datos de referencia, de los cuales puede depender el resultado de una medición, así como fenómenos tales como fluctuaciones a corto plazo del instrumento de medida y magnitudes tales como temperatura ambiente, presión barométrica y humedad.

B.2.11 resultado de una medición
valor atribuido a un mensurando, obtenido por medición

NOTA 1 Cuando se da un resultado, se indicará claramente si se refiere a:

- la indicación
- el resultado sin corregir
- el resultado corregido

y si aquél proviene de una media obtenida a partir de varios valores.

NOTA 2 Una expresión completa del resultado de una medición incluye información sobre la incertidumbre de medida.

[VIM: 1993, definición 3.1]

B.2.12 resultado sin corregir
resultado de una medición, antes de la corrección del error sistemático

[VIM: 1993, definición 3.3]

B.2.13 resultado corregido
resultado de una medición, después de la corrección del error sistemático

[VIM: 1993, definición 3.4]

B.2.14 exactitud de medida
grado de concordancia entre el resultado de una medición y un valor verdadero del mensurando

NOTA 1 El concepto "exactitud" es cualitativo.

NOTA 2 El término "**precisión"** no debe utilizarse por "exactitud"

[VIM: 1993, definición 3.5]

Comentario de la *Guía*: Véase el Comentario de la *Guía* en B.2.3.

B.2.15 repetibilidad (de los resultados de las mediciones)
grado de concordancia entre resultados de sucesivas mediciones del mismo mensurando, realizadas bajo las mismas condiciones de medida

NOTA 1 Estas condiciones se denominan **condiciones de repetibilidad**

NOTA 2 Las condiciones de repetibilidad comprenden:

- el mismo procedimiento de medida
- el mismo observador
- el mismo instrumento de medida, utilizado en las mismas condiciones
- el mismo lugar
- repetición durante un corto periodo de tiempo.

NOTA 3 La repetibilidad puede expresarse cuantitativamente por medio de las características de dispersión de los resultados.

[VIM: 1993, definición 3.6]

B.2.16 reproducibilidad (de los resultados de las mediciones)
grado de concordancia entre los resultados de las mediciones del mismo mensurando, realizadas bajo diferentes condiciones de medida

NOTA 1 Para que una expresión de la reproducibilidad sea válida, es necesario especificar las condiciones de medida que han variado.

NOTA 2 Las condiciones variables pueden comprender:

- principio de medida
- método de medida
- observador
- instrumento de medida
- patrón de referencia

- lugar
- condiciones de utilización
- tiempo.

NOTA 3 La reproducibilidad puede expresarse cuantitativamente por medio de las características de la dispersión de los resultados.

NOTA 4 Los resultados aquí considerados son habitualmente resultados corregidos.

[VIM: 1993, definición 3.7]

B.2.17 desviación típica experimental

para una serie de n mediciones de un mismo mensurando, la magnitud $s(q_k)$ que caracteriza la dispersión de los resultados, viene dada por la fórmula

$$s(q_k) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(q_k - \overline{q})^2}{n-1}}$$

siendo, q_k el resultado de la k-ésima medición y $\overline{q}$ la media aritmética de los n resultados considerados.

NOTA 1 Considerando la serie de n valores como muestra de una distribución, $\overline{q}$ es un estimador insesgado de la media μ_q, y $s^2(q_k)$ es un estimador insesgado de la varianza σ^2, de dicha distribución.

NOTA 2 La expresión $s(q_k)/\sqrt{n}$ es un estimador de la desviación típica de la distribución de $\overline{q}$ y se denomina **desviación típica experimental de la media**.

NOTA 3 La "desviación típica experimental de la media" en ocasiones se denomina, incorrectamente, **error típico de la media**.

NOTA 4 Adaptado del VIM: 1993; definición 3.8.

Comentario de la *Guía*: Algunos de los símbolos utilizados en el VIM han sido cambiados con el fin de lograr la consistencia con la notación utilizada en el punto 4.2 de la *Guía*.

B.2.18 incertidumbre (de medida)

parámetro, asociado al resultado de una medición, que caracteriza la dispersión de los valores que podrían razonablemente ser atribuídos al mensurando.

NOTA 1 El parámetro puede ser, por ejemplo, una desviación típica (o un múltiplo de ésta), o la semiamplitud de un intervalo con un nivel de confianza determinado.

NOTA 2 La incertidumbre de medida comprende, en general, varias componentes. Algunas pueden ser evaluadas a partir de la distribución estadística de los resultados de series de mediciones y pueden caracterizarse por sus desviaciones típicas experimentales. Las otras componentes, que también pueden ser caracterizadas por desviaciones típicas, se evalúan asumiendo distribuciones de probabilidad, basadas en la experiencia adquirida o en otras informaciones.

NOTA 3 Se entiende que el resultado de la medición es la mejor estimación del valor del mensurando, y que todas las componentes de la incertidumbre, comprendidas las que provienen de efectos sistemáticos, tales como las asociadas a correcciones y a patrones de referencia, contribuyen a la dispersión.

[VIM: 1993, definición 3.9]

Comentario de la *Guía*: En el VIM se reseña que esta definición y sus notas son idénticas a las dadas en esta *Guía* (véase 2.2.3).

B.2.19 error (de medida)

resultado de una medición menos un valor verdadero del mensurando

NOTA 1 Considerando que un valor verdadero no puede ser determinado, en la práctica se utiliza un valor convencionalmente verdadero [véase VIM: 993, definiciones 1.19 (B.2.3) y 1.20 (B.2.4)].

NOTA 2 Cuando sea necesario hacer la distinción entre "error" y "error relativo", el primero es a veces denominado **error absoluto de medida**. No hay que confundirlo con el **valor absoluto del error**, que es el módulo del error.

[VIM: 1993, definición 3.10]

Comentario de la *Guía*: Si el resultado de una medición depende de los valores de otras magnitudes distintas del mensurando, los errores de los valores medidos de dichas magnitudes contribuyen al error del resultado de la medición. Véase también el comentario de la *Guía* en B.2.22 y en B.2.3.

B.2.20 error relativo
relación entre el error de medida y un valor verdadero del mensurando

NOTA Considerando que un valor verdadero no puede ser determinado, en la práctica se utiliza un valor convencionalmente verdadero (véase VIM:1993, definiciones 1.19 (B.2.3) y 1.20 (B.2.4)].

[VIM: 1993, definición 3.12]

Comentario de la *Guía*: Véase el comentario de la *Guía* en B.2.3.

B.2.21 error aleatorio
resultado de una medición menos la media de un número infinito de mediciones del mismo mensurando, efectuadas bajo condiciones de repetibilidad

NOTA 1 El error aleatorio es igual al error menos el error sistemático.

NOTA 2 Como no pueden hacerse más que un número finito de mediciones, solamente es posible determinar una estimación del error aleatorio.

[VIM: 1993, definición 3.13]

Comentario de la *Guía*: Véase el comentario de la *Guía* en B.2.22.

B.2.22 error sistemático
media que resultaría de un número infinito de mediciones del mismo mensurando efectuadas bajo condiciones de repetibilidad, menos un valor verdadero del mensurando

NOTA 1 El error sistemático es igual al error menos el error aleatorio.

NOTA 2 El valor verdadero, como el error sistemático y sus causas, no pueden ser conocidos completamente.

NOTA 3 Para un instrumento de medida, véase "error de justeza" (VIM: 1993, definición 5.25).

[VIM: 1993, definición 3.14]

Comentario de la *Guía*: El error sobre el resultado de una medición (véase B.2.19) puede considerarse a menudo como proveniente de un número de efectos sistemáticos y aleatorios que contribuyen individualmente como componentes de error al error del resultado. Véase también el comentario de la *Guía* a B.2.19 y a B.2.3.

B.2.23 corrección
valor sumado algebraicamente al resultado sin corregir de una medición, para compensar un error sistemático

NOTA 1 La corrección es igual al opuesto del error sistemático estimado.

NOTA 2 Puesto que el error sistemático no puede conocerse perfectamente, la compensación no puede ser completa.

[VIM: 1993, definición 3.15]

B.2.24 factor de corrección
factor numérico por el que se multiplica el resultado sin corregir de una medición para compensar un error sistemático

NOTA Puesto que el error sistemático no puede conocerse perfectamente, la compensación no puede ser completa.

[VIM: 1993, definición 3.16]

Anexo C

Términos y conceptos estadísticos básicos

C.1 Origen de las definiciones

Las definiciones de los términos estadísticos básicos dados en este anexo han sido tomadas de la Norma Internacional ISO 3534-1:1993* [7] . Esta debería ser la primera fuente de consulta para las definiciones de términos no incluidos en este anexo. Algunos de estos términos y sus conceptos fundamentales son desarrollados en C.3 después de la introducción de sus definiciones en C.2, con la finalidad de facilitar el uso de esta *Guía*. Sin embargo, C.3, que incluye las definiciones de los términos referidos, no está basado directamente en la ISO 3534-1:1993.

C.2 Definiciones

Al igual que en el capítulo 0 y en el anexo B, el uso de paréntesis en ciertas palabras de algunos términos significa que estas palabras pueden ser omitidas, siempre que esto no cause confusión.

Los conceptos presentados desde C.2.1 hasta C.2.14 se definen haciendo uso de las propiedades de las poblaciones. Las definiciones de los conceptos desde C.2.15 hasta C.2.31 se refieren a un conjunto de observaciones (véase referencia [7]).

C.2.1 probabilidad

número real, entre 0 y 1, asociado a un suceso aleatorio

NOTA Puede referirse a la frecuencia relativa de un suceso, dentro de una larga serie, o al grado de credibilidad de que un suceso ocurra. Para un alto grado de credibilidad, la probabilidad es próxima a 1.

[ISO 3534-1:1993, definición 1.1]

C.2.2 variable aleatoria

variable que puede tomar cualquiera de los valores de un conjunto determinado de valores, y a la que se asocia una *distribución de probabilidad* [ISO 3534-1:1993, definición 1.3 (C.2.3)]

NOTA 1 Una variable aleatoria que puede tomar únicamente valores aislados se denomina “discreta” Una variable que puede tomar cualquiera de los valores de un intervalo finito o infinito se denomina “continua”.

NOTA 2 La probabilidad de ocurrencia de un suceso A se representa como $\Pr(A)$ o $P(A)$.

[ISO 3534-1:1993, definición 1.2]

Comentario de la *Guía*: En esta *Guía* se usa el símbolo $\Pr(A)$ en lugar del símbolo $P_\mathrm{r}(A)$ empleado en ISO 3534-1:1993.

C2.3 distribución de probabilidad (de una variable aleatoria)

función que da la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor dado cualquiera o pertenezca a un conjunto dado de valores

NOTA La probabilidad que cubre el conjunto total de valores de una variable aleatoria es igual a 1.

[ISO 3534-1:1993, definición 1.3]

* **Nota a la versión 2008:** la norma ISO 3534-1:1993 ha sido derogada y reemplazada por la norma ISO 3534-1:2006. Obsérvese que algunos de sus términos y definiciones han sido revisados. Para más información consultar la última edición.

C.2.4 función de distribución

función que da, para cada valor de x, la probabilidad de que la variable aleatoria X sea menor o igual que x:

$$F(x) = \Pr(X \leq x)$$

[ISO 3534-1:1993, definición 1.4]

C.2.5 función de densidad de probabilidad (para una variable aleatoria continua)

es la derivada (cuando existe) de la función de distribución:

$$f(x) = dF(x)/dx$$

NOTA *f(x)dx* se denomina “elemento de probabilidad” o “probabilidad elemental”:

$$f(x)dx = \Pr(x < X < x + dx)$$

[ISO 3534-1:1993, definición 1.5]

C.2.6 función de masa de probabilidad

función que da, para cada valor x_i de una variable aleatoria discreta X, la probabilidad p_i de que esta variable aleatoria sea igual a x_i:

$$p_i = \Pr(X = x_i)$$

[ISO 3534-1:1993, definición 1.6]

C.2.7 parámetro

magnitud utilizada para describir la distribución de probabilidad de una variable aleatoria

[ISO 3534-1:1993, definición 1.12]

C.2.8 correlación

relación entre dos o más variables aleatorias dentro de una distribución de dos o más variables aleatorias

NOTA La mayoría de las medidas estadísticas de correlación únicamente miden el grado de linealidad de la relación.

[ISO 3534-1:1993, definición 1.13]

C.2.9 esperanza matemática (de una variable aleatoria o de una distribución de probabilidad); valor esperado; media

1) Para una variable aleatoria discreta X que toma los valores x_i con probabilidades p_i, la esperanza, si existe, es

$$\mu = E(X) = \sum p_i x_i$$

donde el sumatorio se extiende a todos los valores x_i que pueda tomar X.

2) Para una variable aleatoria continua X, con función de densidad de probabilidad $f(x)$, la esperanza, si existe, es

$$\mu = E(X) = \int x f(x) dx$$

donde la integral se extiende a todo el campo de variación de X.

[ISO 3534-1:1993, definición 1.18]

C.2.10 variable aleatoria centrada

variable aleatoria cuya esperanza matemática es igual a cero

NOTA Si la variable aleatoria X tiene por esperanza matemática μ, la correspondiente variable aleatoria centrada es (X-μ).

[ISO 3534-1:1993, definición 1.21]

C.2.11 varianza (de una variable aleatoria o de una distribución de probabilidad)

esperanza matemática del cuadrado de la *variable aleatoria centrada* [ISO 3534-1:1993, definición 1.21 (C.2.10)]:

$$\sigma^2 = V(X) = E\left\{\left[X - E(X)\right]^2\right\}$$

[ISO 3534-1:1993, definición 1.22]

C.2.12 desviación típica (de una variable aleatoria o de una distribución de probabilidad)

raíz cuadrada positiva de la varianza:

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

[ISO 3534-1:1993, definición 1.23]

C.2.13 momento central[2] de orden *q*

en una distribución de una única variable, es la esperanza matemática de la q-ésima potencia de la variable aleatoria centrada ($X - \mu$):

$$E[\left(X - \mu\right)^q]$$

NOTA El momento central de orden 2 es la *varianza* [ISO 3534-1:1993, definición 1.22 (C.2.11)] de la variable aleatoria X.

[ISO 3534-1:1993, definición 1.28]

C.2.14 distribución normal; distribución de Laplace-Gauss

distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua X, cuya función de densidad de probabilidad es:

$$f\left(x\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$\text{para} \quad \infty < x < +\infty$$

NOTA μ es la esperanza matemática y σ es la desviación típica de la distribución normal.

[ISO 3534-1:1993, definición 1.37]

C.2.15 característica

propiedad que ayuda a identificar o diferenciar elementos de una población dada

NOTA La característica puede ser cuantitativa (por variables) o cualitativa (por atributos).

[ISO 3534-1:1993, definición 2.2]

[2] Si en la definición de momentos, las magnitudes X, X–a, Y, Y–b, etc., se reemplazan por sus valores absolutos; es decir, por $|X|$, $|X–a|$, $|Y|$, $|Y–b|$, etc., quedan definidos otros momentos denominados "momentos absolutos".

C.2.16 población

totalidad de los elementos considerados

NOTA En el caso de una variable aleatoria, se considera que *la distribución de probabilidad* [ISO 3534-1:1993, definición 1.3 (C. 2.3)] define la población de esa variable.

[ISO 3534-1:1993, definición 2.3]

C.2.17 frecuencia

número de ocurrencias de un tipo dado de suceso, o número de observaciones que pertenecen a una clase específica

[ISO 3534-1:1993, definición 2.11]

C.2.18 distribución de frecuencia

relación empírica entre los valores de una característica y sus frecuencias o frecuencias relativas

NOTA La distribución puede representarse gráficamente como un *histograma* **(**ISO 3534-1:1993, definición 2.17), un *diagrama de barras* (ISO 3534-1:1993, definición 2.18), un *polígono de frecuencias acumuladas* (ISO 3534-1:1993, definición 2.19), o como una *tabla de doble entrada* (ISO 3534-1:1993, definición 2.22).

[ISO 3534-1:1993, definición 2.15]

C.2.19 media aritmética; valor medio

suma de valores dividida entre el número de valores

NOTA 1 El término "media" se emplea generalmente cuando se hace referencia a un parámetro de una población y el término "valor medio" cuando se refiere al resultado de cálculo sobre datos obtenidos en una muestra.

NOTA 2 El valor medio de una muestra aleatoria simple tomada de una población es un estimador insesgado de la media de esa población. No obstante, a veces, se utilizan otros estimadores, tales como la media geométrica o la armónica, la mediana o la moda.

[ISO 3534-1:1993, definición 2.26]

C.2.20 varianza

medida de dispersión, igual a la suma de los cuadrados de las desviaciones de las observaciones con respecto a su valor medio, dividido por el número de observaciones menos uno

EJEMPLO Para n observaciones x_1 , x_2 , ..., x_n con valor medio

$$\bar{x} = (1/n)\sum x_\mathrm{i}$$

la varianza es

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(x_\mathrm{i} - \bar{x}\right)^2$$

NOTA 1 La varianza de la muestra es un estimador insesgado de la varianza de la población.

NOTA 2 La varianza es n / (n - 1) veces el momento central de orden 2 (véase nota de ISO 3534-1:1993, definición 2.39).

[ISO 3534-1: 1993, definición 2.33]

Comentario de la *Guía*: La varianza aquí definida se designa de forma más apropiada como "estimación muestral de la varianza poblacional". La varianza de una muestra se define normalmente como el momento central de orden 2 de la muestra (véase C.2.13 y C.2.22).

C.2.21 desviación típica

raíz cuadrada positiva de la varianza

NOTA La desviación típica muestral es un estimador sesgado de la desviación típica poblacional.

[ISO 3534-1:1993, definición 2.34]

C.2.22 momento central de orden *q*

en una distribución de característica única, media aritmética de la q-ésima potencia de la diferencia entre los valores observados y su valor medio $\bar{x}$

$$\frac{1}{n}\sum_{i}\left(x_i-\bar{x}\right)^q$$

donde n es el número de observaciones

NOTA El momento central de orden 1 es igual a cero.

[ISO 3534-1:1993, definición 2.37]

C.2.23 estadístico

función de variables aleatorias de la muestra

NOTA Un estadístico, por ser función de variables aleatorias, es también una variable aleatoria y como tal adquiere diferentes valores de una muestra a otra. El valor del estadístico obtenido usando los valores observados en esta función puede emplearse en un test estadístico o como estimación de un parámetro de la población, como la media o la desviación típica.

[ISO 3534-1:1993, definición 2.45]

C.2.24 estimación

proceso que tiene por finalidad atribuir, a partir de observaciones en una muestra, valores numéricos a los parámetros de una distribución elegida como modelo estadístico de la población, de la cual la muestra fue tomada

NOTA El resultado de este proceso puede expresarse como un valor único [estimador puntual; véase ISO 3534-1:1993, definición 2.51 (C.2.26)] o como un estimador en intervalo [véase ISO 3534-1:1993, definición 2.57 (C.2.27) y 2.58 (C.2.28)].

[ISO 3534-1:1993, definición 2.49]

C.2.25 estimador

estadístico utilizado para estimar un parámetro de una población

[ISO 3534-1:1993, definición 2.50]

C.2.26 estimación

valor de un estimador obtenido como resultado de una estimación

[ISO 3534-1:1993, definición 2.51]

C.2.27 intervalo de confianza bilateral

si T_1 y T_2 son dos funciones de los valores observados tales que, siendo θ un parámetro poblacional que se desea estimar, la probabilidad $\Pr(T_1 \leq \theta \leq T_2)$ es al menos igual a $(1 - \alpha)$ [siendo $(1 - \alpha)$ un número fijo, positivo y menor que 1], el intervalo entre T_1 y T_2 es un intervalo de confianza bilateral $(1 - \alpha)$ para θ

NOTA 1 Los límites T_1 y T_2 del intervalo de confianza son *estadísticos* [ISO 3534-1:1993, definición 2.45 (C.2.23)] y, como tales, tomarán generalmente diferentes valores de una muestra a otra.

NOTA 2 En una larga serie de muestras, la frecuencia relativa de los casos en que el valor verdadero del parámetro poblacional θ está contenido en el intervalo de confianza, es mayor o igual que $(1-\alpha)$.

[ISO 3534-1:1993, definición 2.57]

C.2.28 intervalo de confianza unilateral

Si T es una función de los valores observados tal que, siendo θ un parámetro poblacional que se desea estimar, la probabilidad $\Pr(T \geq \theta)$ [o la probabilidad $\Pr(T \leq \theta)$] es al menos igual a $(1 - \alpha)$ [siendo $(1 - \alpha)$ un número fijo, positivo y menor que 1], el intervalo que va desde el valor más pequeño posible de θ hasta T (o el intervalo que va desde T hasta el mayor valor posible de θ) es un intervalo de confianza unilateral $(1 - \alpha)$ para θ

NOTA 1 El límite T del intervalo de confianza es un *estadístico* [ISO 3534-1:1993, definición 2.45 (C.2.23)] y, como tal, tomará generalmente diferentes valores de una muestra a otra.

NOTA 2 Véase nota 2 de ISO 3534-1:1993, definición 2.57 (C.2.27).

[ISO 3534-1:1993, definición 2.58]

C.2.29 nivel de confianza

valor $(1 - \alpha)$ de la probabilidad asociada a un intervalo de confianza o a un intervalo de cobertura estadística. [Véase ISO 3534-1:1993, definición 2.57 (C.2.27), 2.58 (C.2.28), y 2.61 (C.2.30)]

NOTA $(1-\alpha)$ se expresa frecuentemente en porcentaje.

[ISO 3534-1:1993, definición 2.59]

C.2.30 intervalo de cobertura estadística

intervalo del que puede afirmarse, con un nivel de confianza dado, que contiene al menos una proporción dada de la población

NOTA 1 Cuando los dos límites del intervalo se definen mediante *estadísticos*, el intervalo es bilateral. Cuando uno de los límites es infinito o es el límite extremo de la variable, el intervalo es unilateral.

NOTA 2 También se denomina "intervalo de tolerancia estadística". Este término no debería usarse porque puede crear confusión con "intervalo de tolerancia", definido en ISO 3534-2:1993.

[ISO 3534-1:1993, definición 2.61]

C.2.31 grados de libertad

en general, el número de términos de una suma, menos el número de restricciones sobre los términos de dicha suma

[ISO 3534-1:1993, definición 2.85]

C.3 Elaboración de términos y conceptos

C.3.1 Esperanza matemática

La esperanza matemática de una función $g(z)$ de la variable aleatoria z, con función de densidad de probabilidad $p(z)$ se define como

$$E[g(z)] = \int g(z)p(z)\mathrm{d}z$$

donde $\int p(z)\mathrm{d}z = 1$, en razón de la definición de $p(z)$. La esperanza matemática de la variable aleatoria z, representada por μ_z, y denominada también valor esperado o valor medio de z, viene dada por

$$\mu_z \equiv E(z) = \int z\,p(z)\mathrm{d}z$$

Ésta se estima estadísticamente mediante $\bar{z}$, media aritmética o valor medio de n observaciones independientes z_i de la variable aleatoria z, cuya función de densidad de probabilidad es $p(z)$:

$$\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$$

C.3.2 Varianza

La varianza de una variable aleatoria es la esperanza matemática de su desviación respecto a su esperanza matemática, elevada al cuadrado. Por lo tanto, la varianza de una variable aleatoria z con función de densidad de probabilidad $p(z)$ viene dada por

$$\sigma^2(z) = \int (z - \mu_Z)^2 p(z)\mathrm{d}z$$

donde μ_z es la esperanza matemática de z. La varianza $\sigma^2(z)$ puede estimarse mediante

$$s^2(z_i) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(z_j - \bar{z}\right)^2, \quad \text{donde } \bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$$

y las z_i son n observaciones independientes de z.

NOTA 1 El factor n - 1 en la expresión de $s^2(z_i)$ proviene de la correlación existente entre z_i y $\bar{z}$, y refleja el hecho de que hay únicamente n - 1 valores independientes en el conjunto $\{z_i - \bar{z}\}$.

NOTA 2 Si se conoce la esperanza matemática μ_z de z, la varianza puede estimarse mediante

$$s^2(z_i) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \mu_Z)^2$$

La varianza de la media aritmética de las observaciones es la medida correcta de la incertidumbre de un resultado de medida, en lugar de la varianza de las observaciones individuales. La varianza de una variable z debe distinguirse cuidadosamente de la varianza de la media $\bar{z}$. La varianza de la media aritmética de una serie de n observaciones independientes z_i de z viene dada por $\sigma^2\left(\bar{z}\right) = \sigma^2\left(z_i\right)/n$, y se estima mediante la varianza experimental de la media

$$s^2(\bar{z}) = \frac{s^2(z_i)}{n} = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2$$

C.3.3 Desviación típica

La desviación típica es la raíz cuadrada positiva de la varianza. Mientras que una incertidumbre típica tipo A se obtiene tomando la raíz cuadrada de la varianza evaluada estadísticamente, cuando se evalúa una incertidumbre típica tipo B, es a menudo más cómodo obtener primero una desviación típica equivalente, no estadística, y luego obtener la varianza equivalente elevando al cuadrado dicha desviación típica.

C.3.4 Covarianza

La covarianza de dos variables aleatorias es una medida de su dependencia mutua. La covarianza de dos variables aleatorias y y z se define mediante

$$\mathrm{cov}(y,z) = \mathrm{cov}(z,y) = \mathrm{E}\left\{\left[y - \mathrm{E}(y)\right]\left[z - \mathrm{E}(z)\right]\right\}$$

de donde resulta

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(y,z) = \operatorname{cov}(z,y) &= \iint \left(y-\mu_y\right)\left(z-\mu_z\right) p(y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \iint yz\,p(y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \mu_y\,\mu_z\end{aligned}$$

donde $p(y,z)$ es la función de densidad de probabilidad conjunta de las dos variables y y z. La covarianza $\operatorname{cov}(y,z)$ [también expresada como $\nu(y,z)$] puede estimarse mediante $s(y_i,z_i)$ obtenida a partir de n pares independientes de observaciones simultáneas y_i y z_i de y y z,

$$s(y_i,z_i) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)\left(z_i - \overline{z}\right)$$

donde

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad \text{y} \qquad \overline{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$$

NOTA La covarianza estimada de las dos medias $\overline{y}$ y $\overline{z}$, viene dada por $s\left(\overline{y},\overline{z}\right) = s\left(y_i, z_i\right)/n$.

C.3.5 Matriz de covarianzas

Para una distribución de probabilidad de varias variables, se denomina matriz de covarianzas a la matriz $\boldsymbol{V}$ cuyos elementos son igual a las varianzas y covarianzas de las variables. Los elementos de la diagonal, $\nu(z,z) \equiv \sigma^2(z)$, o $s(z_i,z_i) \equiv s^2(z_i)$, son las varianzas, mientras que los elementos fuera de la diagonal, $\nu(y,z)$, o $s(y_i,z_i)$, son las covarianzas.

C.3.6 Coeficiente de correlación

El coeficiente de correlación es una medida de la dependencia relativa mutua de dos variables, y es igual al cociente entre su covarianza y la raíz cuadrada positiva del producto de sus varianzas. Es decir,

$$\rho(y,z) = \rho(z,y) = \frac{\nu(y,z)}{\sqrt{\nu(y,y)\,\nu(z,z)}} = \frac{\nu(y,z)}{\sigma(y)\,\sigma(z)}$$

con las estimaciones

$$r(y_i,z_i) = r(z_i,y_i) = \frac{s(y_i,z_i)}{\sqrt{s(y_i,y_i)\,s(z_i,z_i)}} = \frac{s(y_i,z_i)}{s(y_i)\,s(z_i)}$$

El coeficiente de correlación es un número entero tal que $-1 \le \rho \le +1$, o $-1 \le r(y_i, z_i) \le +1$.

NOTA 1 Los coeficientes de correlación son normalmente más útiles que las covarianzas, debido a que ρ y r son números enteros comprendidos en el intervalo de –1 a +1, extremos incluidos, mientras que las covarianzas son frecuentemente magnitudes con dimensiones y órdenes de magnitud poco cómodos.

NOTA 2 Para distribuciones de probabilidad de varias variables suele darse frecuentemente la matriz de coeficientes de correlación, en lugar de la matriz de covarianzas. Como $\rho(y,y) = 1$, y $r(y_i,y_i) = 1$, los elementos de la diagonal de la matriz son iguales a la unidad.

NOTA 3 Si las estimaciones de entrada x_i y x_j están correlacionadas (véase 5.2.2), y una variación δ_i en x_i produce una variación δ_j en x_j, el coeficiente de correlación asociado a x_i y x_j puede estimarse aproximadamente por

$$r\left(x_i,x_j\right) \approx u(x_i)\delta_j \,/\, \left[u(x_j)\delta_i\right]$$

Esta relación puede servir como base para estimar los coeficientes de correlación de forma experimental. También puede emplearse para calcular la variación aproximada de una estimación de entrada producida por una variación en otra estimación de entrada, si se conoce su coeficiente de correlación.

C.3.7 Independencia

Dos variables aleatorias son estadísticamente independientes si su función de distribución de probabilidad conjunta es el producto de sus funciones de distribución de probabilidad individuales.

NOTA Si dos variables aleatorias son independientes, su covarianza y su coeficiente de correlación son cero, pero lo contrario no es necesariamente cierto.

C.3.8 La distribución *t* o de Student

La distribución *t*, o de Student, es la distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua *t*, cuya función de densidad de probabilidad es

$$p(t,\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}$$

$$\text{para} \quad -\infty < t < +\infty$$

donde Γ es la función gamma y $\nu > 0$. La esperanza matemática de la función de distribución *t* es cero y su varianza es $\nu/(\nu - 2)$ para $\nu > 2$. Conforme $\nu \to \infty$, la función de distribución se aproxima a la distribución normal con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ (véase C.2.14).

La función de distribución de probabilidad de la variable $(\bar{z} - \mu_z)/s(\bar{z})$ es la función de distribución *t*, si la variable aleatoria *z* está normalmente distribuida con esperanza μ_z, donde $\bar{z}$ es la media aritmética de *n* observaciones independientes z_i de *z*, $s(z_i)$ es la desviación típica experimenal de *n* observaciones, y $s(\bar{z}) = s(z_i)/\sqrt{n}$ es la desviación típica experimental de la media $\bar{z}$, con $\nu = n - 1$ grados de libertad.

Anexo D

Valor “verdadero”, error e incertidumbre

El término **valor verdadero** (B.2.3) ha sido utilizado tradicionalmente en publicaciones sobre incertidumbre, pero no en esta *Guía*, por las razones aducidas en este Anexo. Debido a que los términos “mensurando”, “error” e “incertidumbre” se malinterpretan frecuentemente, el presente anexo proporciona una discusión adicional sobre las ideas que subyacen bajo estos conceptos, tratando de complementar la discusión presentada en el capítulo 3. Se presentan dos figuras que ilustran porqué el concepto de incertidumbre adoptado en esta *Guía* está basado en el resultado de medida y su incertidumbre evaluada, en lugar de basarse en las magnitudes desconocidas valor “verdadero” y error.

D.1 Mensurando

D.1.1 El primer paso a la hora de realizar una medición es definir el mensurando; es decir, la magnitud objeto de medición; el mensurando no puede definirse mediante un valor sino exclusivamente mediante una descripción de una magnitud. Sin embargo, en principio, un mensurando no podría describirse *completamente* más que poseyendo una cantidad infinita de información. Por ello, al caber siempre interpretaciones varias en toda medición, la definición incompleta del mensurando introduce en la incertidumbre del resultado de una medición una componente de incertidumbre que puede ser o no significativa, dependiendo de la exactitud requerida en la medición.

D.1.2 Frecuentemente, la definición de un mensurando incluye ciertas condiciones y estados físicos.

EJEMPLO La velocidad del sonido en aire seco de composición (fracción molar) N_2 = 0,780 8, O_2 = 0,209 5, Ar = 0,009 35 y CO_2 = 0,000 35 a la temperatura T = 273,15 K y presión p = 101 325 Pa.

D.2 Realización de una magnitud

D.2.1 Idealmente, la realización de una magnitud para una medición debería ser totalmente coherente con la definición del mensurando. Sucede frecuentemente, sin embargo, que tal magnitud no puede obtenerse, y la medición se lleva a cabo sobre una magnitud que es una aproximación del mensurando.

D.3 Valor “verdadero” y valor corregido

D.3.1 El resultado de la medición de la magnitud realizada se corrige por la diferencia existente entre dicha magnitud y el mensurando, con objeto de predecir el resultado que se obtendría si la magnitud realizada cumpliera totalmente la definición del mensurando. El resultado de la medición de la magnitud realizada se corrige también por todos los efectos sistemáticos significativos identificados. A pesar de que el resultado final corregido es considerado a veces como la mejor estimación del valor “verdadero” del mensurando, en realidad el resultado es simplemente la mejor estimación del valor de la magnitud que se pretende medir.

D.3.2 Como ejemplo, supóngase que el mensurando es el espesor de una lámina dada de material, a una temperatura específica. La muestra se lleva a una temperatura próxima a la especificada y su espesor en un punto determinado se mide con ayuda de un micrómetro. El espesor del material en dicho punto, a dicha temperatura, bajo la presión aplicada por el micrómetro, es la magnitud realizada.

D.3.3 En el momento de la medición se determinan la temperatura del material y la presión aplicada. El resultado sin corregir de la medición realizada de la magnitud se corrige entonces teniendo en cuenta la curva de calibración del micrómetro, la desviación de temperatura de la muestra respecto a la temperatura especificada, y la ligera compresión de la muestra bajo la fuerza aplicada.

D.3.4 El resultado corregido puede considerarse como la mejor estimación del valor "verdadero", "verdadero" en el sentido de que es el valor de la magnitud que suponemos satisface totalmente la definición del mensurando; pero si el micrómetro se hubiera aplicado en una zona diferente de la lámina de material, la magnitud realizada habría sido diferente, con un valor "verdadero" diferente. Sin embargo, ese valor "verdadero" sería coherente con la definición del mensurando, ya que ésta no especificaba que el espesor debiera determinarse en un punto particular de la lámina. Así, en este caso, debido a la definición incompleta del mensurando, el valor "verdadero" posee una incertidumbre que puede evaluarse a partir de mediciones realizadas en diferentes lugares de la lámina. Hasta cierto punto, cada mensurando posee una incertidumbre "intrínseca" que, en principio, puede estimarse de alguna forma. Esta es la mínima incertidumbre con la que un mensurando puede determinarse, y toda medición que posea dicha incertidumbre puede considerarse como la mejor medición posible del mensurando. La obtención de un valor de la magnitud en cuestión con una incertidumbre menor requiere una definición más completa del mensurando.

NOTA 1 En el ejemplo, la definición del mensurando deja de lado muchos otros aspectos que podrían afectar razonablemente al valor del espesor: la presión atmosférica, la humedad, el comportamiento de la lámina en el campo gravitatorio, la forma de apoyo, etc.

NOTA 2 A pesar de que el mensurando debe definirse con el suficiente detalle como para que cualquier incertidumbre proveniente de su definición incompleta sea despreciable en comparación con la exactitud requerida en la medición, debe reconocerse que esto no siempre es posible. La definición puede, por ejemplo, ser incompleta porque no especifique parámetros cuyos efectos, sin justificación alguna, se han supuesto despreciables; o puede implicar condiciones que nunca podrán cumplirse y cuya realización imperfecta es difícil de valorar. Así, en el ejemplo de D.1.2, la velocidad del sonido implica infinitas ondas planas de amplitud cada vez menor. Como la medición no satisface esta condición, deben considerarse los efectos debidos a la difracción y a la falta de linealidad.

NOTA 3 La definición inadecuada del mensurando puede llevar a discrepancias entre resultados de diferentes laboratorios, obtenidos tras mediciones realizadas teóricamente sobre la misma magnitud.

D.3.5 Los términos "valor verdadero de un mensurando" o "valor verdadero de una magnitud" (a menudo sólo "valor verdadero" en forma simplificada) se evitan en esta *Guía* por considerar el término "verdadero" como redundante. En efecto, "mensurando" (véase B.2.9) significa "magnitud particular objeto de medición", de aquí que "valor de un mensurando" signifique "valor de una magnitud particular objeto de medición". Como por "magnitud particular" se entiende generalmente una magnitud definida o específica (véase B.2.1, nota 1), el adjetivo "verdadero" en "valor verdadero de un mensurando" (o en "valor verdadero de una magnitud") es innecesario - el valor "verdadero" del mensurando (o magnitud) es simplemente el valor del mensurando (o magnitud). Además, tal como se indicó en la discusión anterior, un valor "verdadero" es sólo un concepto ideal.

D.4 Error

Un resultado de medida corregido no es el valor del mensurando, es decir, existe un error, debido a imperfecciones en la medición de la magnitud realizada, desde variaciones aleatorias de las observaciones (efectos aleatorios), hasta la determinación inadecuada de las correcciones por efectos sistemáticos, y el conocimiento incompleto de ciertos fenómenos físicos (de nuevo, efectos sistemáticos). Ni el valor de la magnitud realizada, ni el valor del mensurando, pueden conocerse jamás con exactitud; todo lo más que puede conocerse son sus valores estimados. En el ejemplo anterior, el espesor medido en la lámina *puede* ser erróneo; es decir, puede diferir del valor del mensurando (el espesor de la lámina), debido a que los siguientes factores pueden combinarse entre sí, contribuyendo a un error desconocido en el resultado de medida:

a) pequeñas diferencias entre las indicaciones del micrómetro cuando se aplica repetidamente sobre la misma magnitud realizada;

b) calibración imperfecta del micrómetro;

c) medición imperfecta de la temperatura y de la presión aplicada;

d) conocimiento incompleto de los efectos de la temperatura, la presión atmosférica y la humedad, sobre la muestra, el micrómetro, o ambos.

D.5 Incertidumbre

D.5.1 Mientras que los valores exactos de las contribuciones al error de un resultado de medición son desconocidos y nunca podrán conocerse, las *incertidumbres* asociadas a los efectos aleatorios y sistemáticos que dan lugar al error sí pueden evaluarse. Sin embargo, aunque las incertidumbres evaluadas sean pequeñas, esto no garantiza que el error en el resultado de medida sea pequeño, ya que puede haberse pasado por alto algún efecto sistemático no identificado, en la determinación de alguna corrección, o al evaluar el conocimiento incompleto del que se dispone. Por ello, la incertidumbre del resultado de medición no es necesariamente una indicación de la certeza existente de que el resultado de medición se halla próximo al valor del mensurando; se trata simplemente de una estimación de la verosimilitud existente acerca de la proximidad al mejor valor, que es consistente con el conocimiento actualmente disponible.

D.5.2 La incertidumbre de medida es pues una expresión del hecho de que, para un mensurando y un resultado de medida del mismo dados, no existe un único valor, sino un infinito número de valores dispersos en torno al resultado, que son compatibles con todas las observaciones, datos y conocimientos que se poseen del mundo físico, y que, con diferentes grados de credibilidad, pueden ser atribuidos al mensurando.

D.5.3 Afortunadamente, en muchas situaciones prácticas de medición, la mayor parte de la discusión del presente anexo no es de aplicación. Este es el caso, por ejemplo, cuando un mensurando está definido adecuadamente; cuando los patrones o instrumentos son calibrados respecto a patrones de referencia perfectamente conocidos, dotados de trazabilidad a patrones nacionales; y cuando las incertidumbres de las correcciones de calibración son insignificantes comparadas con las incertidumbres provenientes de efectos aleatorios sobre las indicaciones de los instrumentos, o cuando se tiene un número limitado de observaciones (véase E.4.3). No obstante, el conocimiento incompleto de las magnitudes de influencia y sus efectos puede contribuir, a menudo de forma significativa, a la incertidumbre del resultado de una medición.

D.6 Representación gráfica

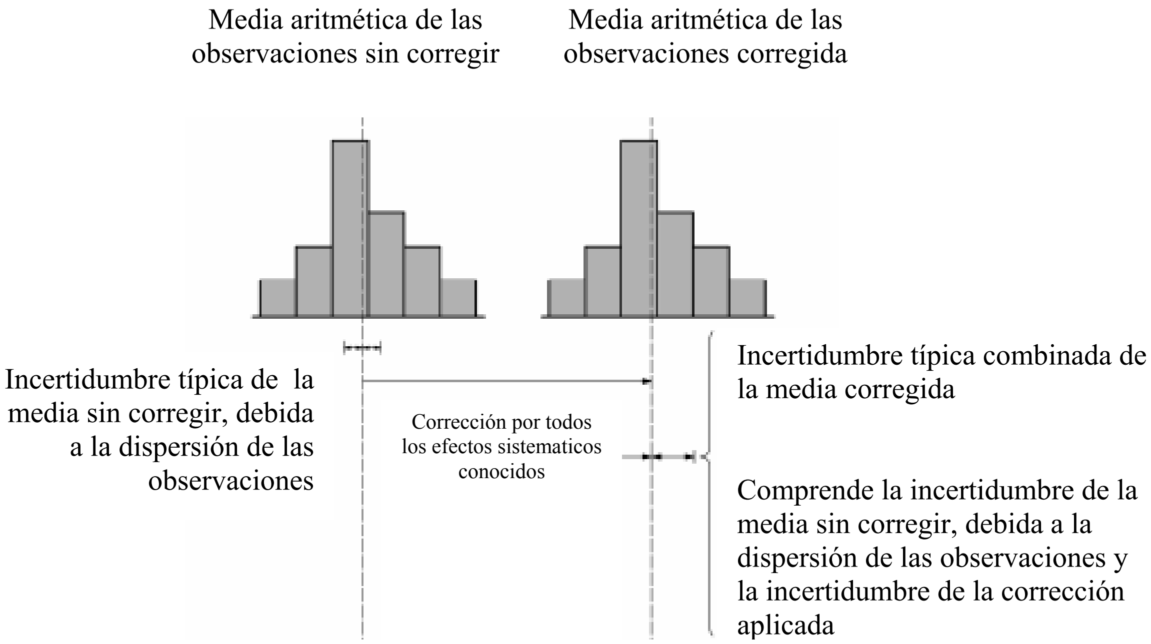
D.6.1 La Figura D.1 representa algunas de las ideas discutidas en el capítulo 3 de esta *Guía* y en este anexo. Ilustra por qué el objeto de esta *Guía* es la incertidumbre y no el error. El error exacto del resultado de una medición es, en general, desconocido e incognoscible. Lo más que se puede hacer es estimar los valores de las magnitudes de entrada, incluyendo las correcciones por efectos sistemáticos identificados, junto con sus incertidumbres típicas (desviaciones típicas estimadas), bien a partir de distribuciones desconocidas de probabilidad, en base a muestras obtenidas por medio de observaciones repetidas, bien a partir de distribuciones subjetivas o supuestas *a priori*, basadas en el conjunto de informaciones disponibles; y calcular entonces el resultado de medida, a partir de los valores estimados de las magnitudes de entrada y de la incertidumbre típica combinada de ese resultado, en base a las incertidumbres típicas de dichos valores estimados. Sólo si existe una base sólida para creer que todo esto se ha realizado apropiadamente, sin haber pasado por alto efectos sistemáticos significativos, puede asumirse que el resultado de medida es una estimación fiable del valor del mensurando, y que su incertidumbre típica combinada es una medida fiable de su *posible* error.

NOTA 1 En la figura D.1a, las observaciones se muestran en forma de histograma, a efectos ilustrativos (véase 4.4.3 y figura 1b).

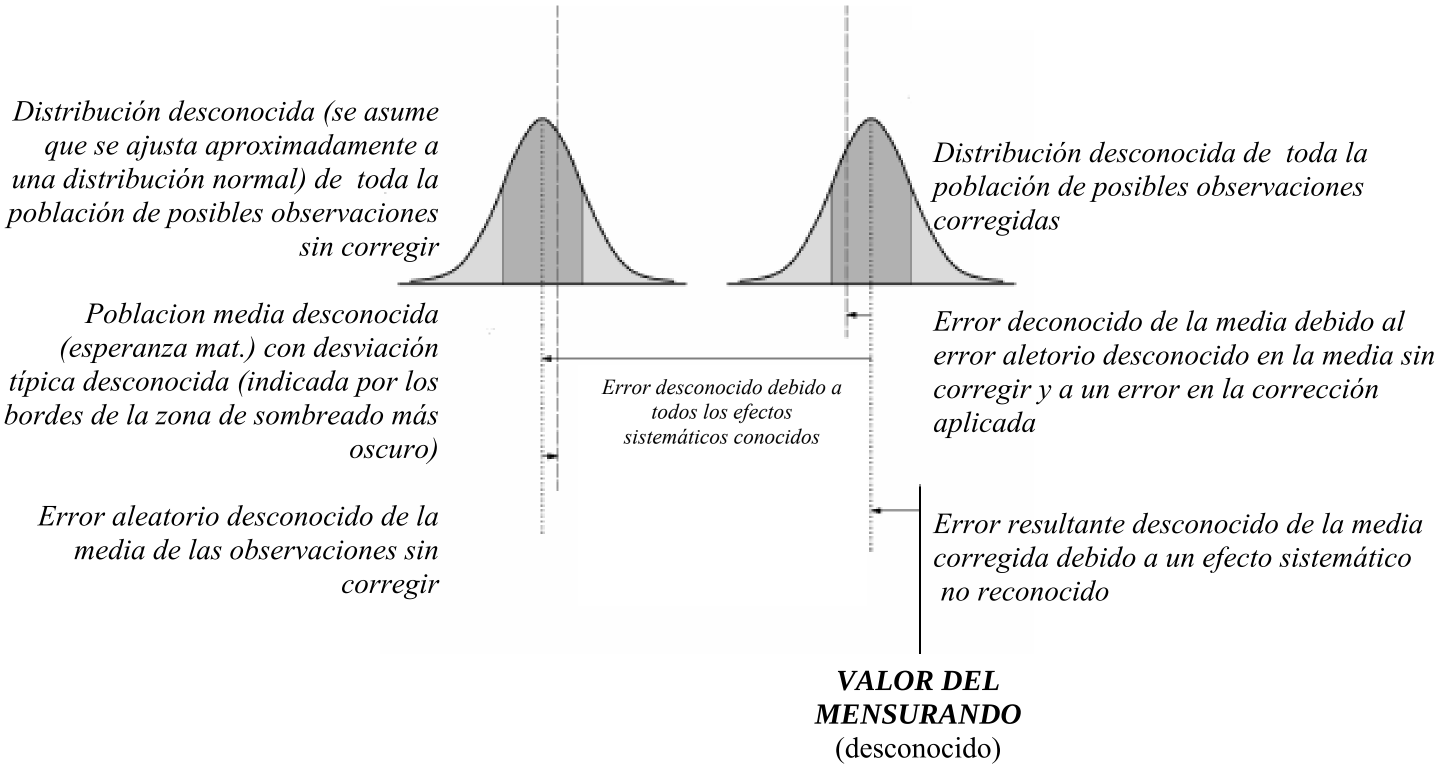
NOTA 2 La corrección de un error es igual a la estimación del error, cambiada de signo. Así, tanto en la figura D.1, como en la figura D.2, una flecha ilustra que la corrección de un error es igual en longitud, pero apuntando en dirección opuesta, a la flecha que representaría el propio error, y viceversa. El texto de la figura expresa claramente si una flecha en particular representa una corrección o un error.

D.6.2 La figura D.2 describe algunas de las ideas ya presentadas en la figura D.1, pero en forma diferente. Además, también ilustra la idea de que pueden existir muchos valores del mensurando si la definición de éste es incompleta (entrada *g* de la figura D.2). La incertidumbre derivada de esta definición incompleta, medida por la varianza, se evalúa a partir de mediciones de múltiples realizaciones del mensurando, utilizando el mismo método, los mismos instrumentos, etc. (véase D.3.4).

NOTA En la columna encabezada con la palabra "Varianza" se sobreentiende que las varianzas son las $u_i^2(y)$ definidas en la ecuación (11a) de 5.1.3; de ahí que se sumen linealmente, tal como se muestra.



a) Conceptos basados en magnitudes observadas



b) Conceptos ideales basados en magnitudes desconocidas

Figura D.1. Ilustración gráfica de *valor, error* e *incertidumbre*

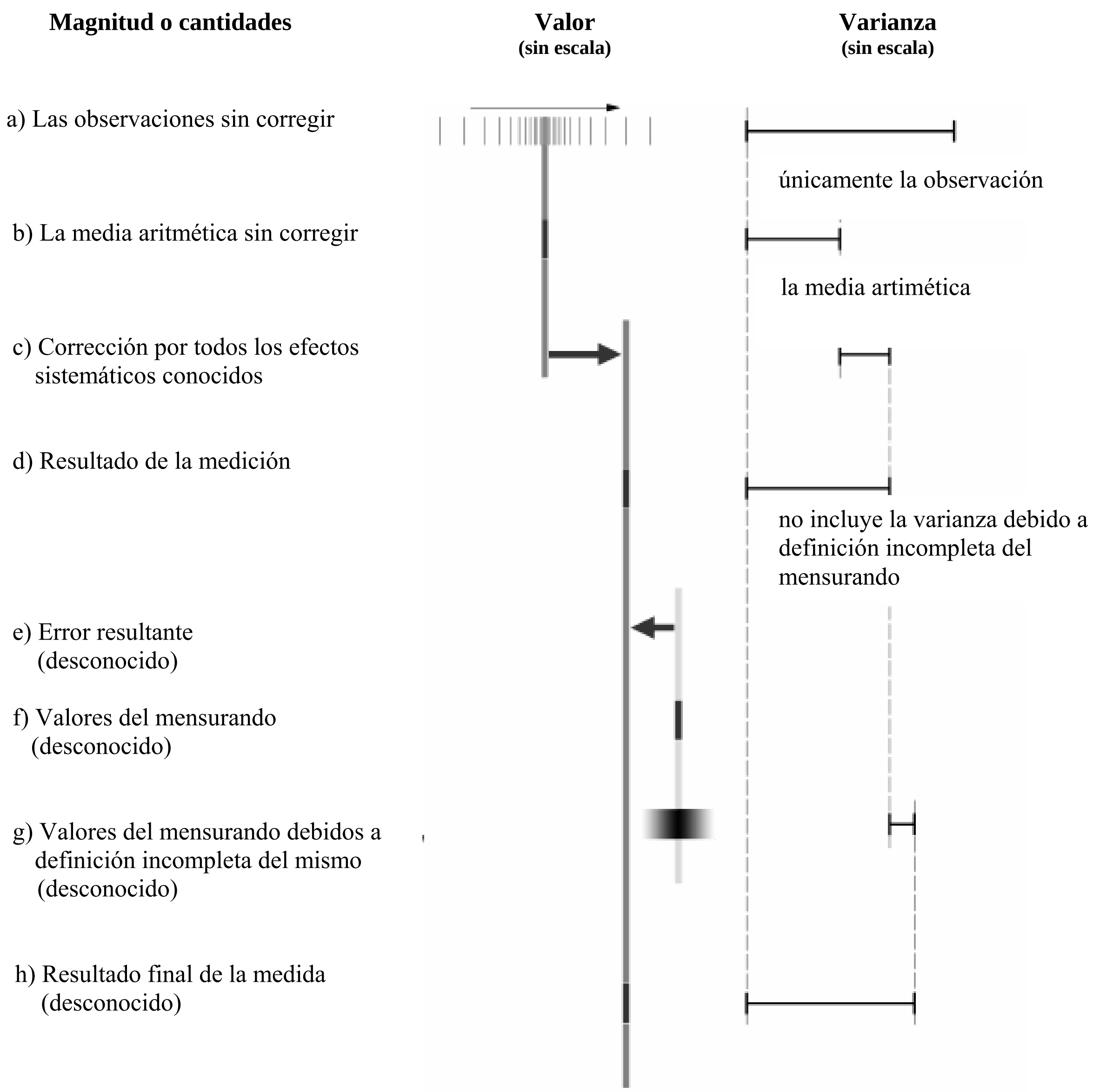


Figura D.2. Ilustración gráfica de *valores*, *error* e *incertidumbre*

Anexo E

Motivación y fundamentos de la Recomendación INC-1 (1980)

Este anexo presenta brevemente tanto la motivación como los fundamentos estadísticos de la Recomendación INC-1 (1980) del Grupo de Trabajo sobre la Expresión de las Incertidumbres, en los que se apoya esta *Guía*. Para más detalles, véanse las referencias [1, 2, 11, 12].

E.1 "Seguro", "aleatorio" y "sistemático"

E.1.1 Esta *Guía* presenta un método de amplia aplicación para evaluar y expresar la incertidumbre en la medición. Este método proporciona un valor de la incertidumbre realista, más que "seguro", basado en la idea de que no existe diferencia de naturaleza entre una componente de incertidumbre proveniente de un efecto aleatorio y otra que proviene de una corrección por efecto sistemático (véase 3.2.2 y 3.2.3). El método se encuentra por ello en desacuerdo con algunos métodos más antiguos que tienen en común las dos ideas siguientes.

E.1.2 La primera idea es que la incertidumbre declarada debe ser "segura" o "conservadora", lo que significa que jamás debe implicar el riesgo de ser subestimada. Dado que la evaluación de la incertidumbre de un resultado de medida es problemática, esta idea conduce frecuentemente a una sobreestimación deliberada de la misma.

E.1.3 La segunda idea es que las influencias responsables de la incertidumbre podrían ser siempre reconocidas, bien como "aleatorias", bien como "sistemáticas", siendo ambas categorías de naturaleza diferente. Las incertidumbres asociadas a cada categoría deberían componerse de forma apropiada y expresarse por separado (o componerse de cierta forma específica cuando se exija un único número). De hecho, el método de composición de incertidumbres estaba frecuentemente concebido para satisfacer la exigencia de seguridad.

E.2 Justificación para evaluaciones realistas de la incertidumbre

E.2.1 Cuando se expresa el valor de un mensurando, debe darse la mejor estimación de su valor, así como la mejor evaluación de la incertidumbre de dicha estimación ya que, si la incertidumbre debiera apartarse de su valor correcto, normalmente no sería posible decidir la dirección hacia la que se apartaría de forma "segura". Una subestimación de las incertidumbres podría entrañar un exceso de confianza en los valores que están en cuestión, con consecuencias imprevisibles, cuando no desastrosas. Una sobreestimación deliberada de las incertidumbres podría también tener repercusiones indeseables. Podría suponer, por ejemplo, el que los usuarios de equipos de medida debieran adquirir instrumentos más caros de lo necesario, u obligarles a rechazar inútilmente productos costosos, o incluso a no aceptar los servicios ofrecidos por un laboratorio de calibración.

E.2.2 Esto no quiere decir que los que utilizan un resultado de medida no puedan aplicar su propio factor multiplicador a una incertidumbre dada, para obtener una incertidumbre expandida que defina un intervalo con un nivel de confianza específico que satisfaga sus propias necesidades. Tampoco quiere decir que, en determinadas circunstancias, los organismos que proporcionan resultados de medida no puedan aplicar, corrientemente, un factor conducente a una incertidumbre expandida análoga, que satisfaga las necesidades de un tipo particular de usuarios de sus resultados. Sin embargo, tales factores (que siempre deben indicarse) deben aplicarse a una incertidumbre determinada por un método realista y únicamente *después* de dicha determinación, de forma que el intervalo definido por la incertidumbre expandida tenga el nivel de confianza requerido y que la operación pueda invertirse fácilmente.

E.2.3 Aquellos que se ocupan de las mediciones deben incorporar frecuentemente a sus análisis resultados de mediciones efectuadas por otras personas, cada uno de estos teniendo su propia incertidumbre. A la hora de evaluar la incertidumbre de su propio resultado de medida, necesitan, no un valor "seguro", sino el mejor valor de incertidumbre de cada uno de los resultados incorporados, procedentes de otro origen. Para dar la incertidumbre de su propio resultado, deben poder componer de forma lógica y simple estas incertidumbres importadas, con las incertidumbres de sus propias observaciones. La Recomendación INC-1 (1980) proporciona el método.

E.3 Justificación para tratar de forma idéntica todas las componentes de la incertidumbre

La finalidad de este apartado es ilustrar mediante un ejemplo sencillo cómo la *Guía* trata exactamente de la misma forma las componentes de la incertidumbre provenientes de efectos aleatorios, y las provenientes de correcciones estimadas de efectos sistemáticos, a la hora de evaluar la incertidumbre de un resultado de medida. De esta forma se ejemplifica el punto de vista adoptado en esta *Guía*, y citado en E.1.1; es decir, que todas las componentes de la incertidumbre son de la misma naturaleza y deben ser tratadas de forma idéntica. El punto de partida de la presentación es una demostración simplificada de la expresión matemática de la propagación de desviaciones típicas, denominada en esta *Guía* ley de propagación de la incertidumbre.

E.3.1 Supongamos que la magnitud de salida $z = f(w_1, w_2, ..., w_N)$ depende de N magnitudes de entrada $w_1, w_2, ..., w_N$, donde cada w_i viene descrita por una distribución de probabilidad adecuada. El desarrollo en serie de Taylor de primer orden, de f alrededor de las esperanzas matemáticas de las w_i, $\mathrm{E}(w_i) \equiv \mu_i$, es, para las pequeñas variaciones de z alrededor de μ_z en función de las pequeñas variaciones de w_i alrededor de μ_i,

$$z - \mu_z = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial w_i}(w_i - \mu_i) \tag{E.1}$$

donde los términos de grado más elevado se suponen despreciables, y con $\mu_z = f(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_N)$. El cuadrado de la diferencia $z - \mu_z$ viene dado entonces por

$$(z - \mu_z)^2 = \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial w_i}(w_i - \mu_i)\right]^2 \tag{E.2a}$$

que puede escribirse en la forma

$$(z - \mu_z)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial w_i}\right)^2 (w_i - \mu_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial w_i} \frac{\partial f}{\partial w_j}(w_i - \mu_i)(w_j - \mu_j) \tag{E.2b}$$

La esperanza matemática del cuadrado de la diferencia $(z - \mu_z)^2$ es la varianza de z; es decir, $\mathrm{E}[(z-\mu_z)^2]=\sigma_z^2$, y la ecuación (E.2b) conduce a

$$\sigma_z^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial w_i}\right)^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial w_i} \frac{\partial f}{\partial w_j} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \tag{E.3}$$

En esta expresión, $\sigma_i^2 = E[(w_i - \mu_i)^2]$ es la varianza de w_i y $\rho_{ij} = \nu(w_i, w_j)/(\sigma_i^2 \sigma_j^2)^{1/2}$ es el coeficiente de correlación de w_i y w_j, donde $\nu(w_i, w_j) = E[(w_i - \mu_i)(w_j - \mu_j)]$ es la covarianza de w_i y w_j.

NOTA 1 σ_z^2 *y* σ_i^2 son respectivamente los momentos centrales de orden 2 (véase C.2.13 y C.2.22) de las distribuciones de probabilidad de z y de w_i. Una distribución de probabilidad puede caracterizarse completamente mediante su esperanza matemática, su varianza y sus momentos centrales de mayor orden.

NOTA 2 La ecuación (13) de 5.2.2 [al igual que la ecuación (15)] empleada para calcular la incertidumbre típica combinada es idéntica a la ecuación (E.3), salvo el hecho de que la ecuación (13) está expresada en términos de estimaciones de varianzas, de desviaciones típicas y de coeficientes de correlación.

E.3.2 En la terminología tradicional, la ecuación (E.3) se denomina generalmente “ley general de propagación de errores”, denominación que se aplica mejor a una expresión de la forma

$\Delta z = \sum_{i=1}^{N} (\partial f / \partial w_i) \Delta w_i$, donde Δz es la variación de z debida a (pequeñas) variaciones Δw_i de w_i [véase ecuación E.8]. Tal como se ha hecho en esta *Guía*, es apropiado denominar a la ecuación (E.3) ley de propagación de la incertidumbre, puesto que esta ecuación muestra cómo se componen las incertidumbres de magnitudes de entrada w_i, dadas por las desviaciones típicas de las distribuciones de probabilidad de las w_i, para obtener la incertidumbre de la magnitud de salida z, si esta incertidumbre es también igual a la desviación típica de la distribución de probabilidad de z.

E.3.3 La ecuación (E.3) se aplica también a la propagación de múltiples desviaciones típicas puesto que si se reemplaza cada desviación típica σ_i por un múltiplo $k\sigma_i$, con el mismo k para cada σ_i, la desviación típica de la magnitud de salida z viene dada por $k\sigma_z$. Sin embargo, dicha ecuación no es de aplicación a la propagación de los intervalos de confianza. En efecto, si cada σ_i se reemplaza por una magnitud δ_i que define un intervalo correspondiente a un nivel de confianza dado p, la magnitud resultante para z, δ_z, no definirá un intervalo correspondiente al mismo valor de p, salvo que todas las w_i sigan distribuciones normales. La ecuación (E.3) no presupone ninguna hipótesis sobre la normalidad de las distribuciones de probabilidad de las magnitudes w_i. Más específicamente, si en la ecuación (10) de 5.1.2, cada incertidumbre típica $u(x_i)$ es evaluada a partir de observaciones repetidas independientes, y se multiplica por el factor t correspondiente a su número de grados de libertad para un valor particular de p (por ejemplo, p = 95 %), la incertidumbre de la estimación y no definirá un intervalo correspondiente a dicho valor de p (véase G.3 y G.4).

NOTA La exigencia de normalidad para la propagación de los intervalos de confianza utilizando la ecuación (E.3) puede ser una de las razones para la separación histórica entre componentes de incertidumbre deducidas de observaciones repetidas, que se suponen distribuidas normalmente, y componentes evaluadas simplemente mediante límites superior e inferior.

E.3.4 Consideremos el ejemplo siguiente: z depende solamente de una magnitud de entrada w, $z = f(w)$, y w se estima mediante el valor medio de n valores w_k de w; estos n valores se obtienen a partir de n observaciones repetidas e independientes q_k de una variable aleatoria q, estando w_k y q_k relacionadas mediante la ecuación

$$w_k = \alpha + \beta q_k \tag{E.4}$$

En esta ecuación, α representa un desfase (offset) o desplazamiento sistemático y constante para todas las observaciones, y β es un factor proporcional. El desfase (offset) y el factor de escala, aunque fijos en el curso de las observaciones, se suponen caracterizados por una distribución de probabilidad *a priori*, siendo α y β las mejores estimaciones de las esperanzas matemáticas de dichas distribuciones.

La mejor estimación de w es la media aritmética $\overline{w}$ obtenida a partir de

$$\overline{w} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\alpha + \beta\, q_k) \tag{E.5}$$

La magnitud z viene estimada entonces por $f(\overline{w}) = f(\alpha, \beta, q_1, q_2, ..., q_n)$ y la estimación $u^2(z)$ de su varianza $\sigma^2(z)$ se obtiene a partir de la ecuación (E.3). Si suponemos, para simplificar, que $z = w$, de forma que la mejor estimación de z sea $z = f(\overline{w}) = \overline{w}$, entonces la estimación $u^2(z)$ puede hallarse fácilmente. Observando que, según la ecuación (E.5),

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 1 \quad ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \beta} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k = \overline{q}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial q_{\mathrm{k}}} = \frac{\beta}{n}$$

llamando respectivamente $u^2(\alpha)$ y $u^2(\beta)$ a las varianzas estimadas de α y de β, y suponiendo que las observaciones individuales no están correlacionadas, se encuentra, a partir de la ecuación (E.3)

$$u^2(z) = u^2(\alpha) + \overline{q}^2 u^2(\beta) + \beta^2 \frac{s^2(q_k)}{n} \tag{E.6}$$

donde $s^2(q_k)$ es la varianza experimental de las observaciones q_k, calculada según la ecuación (4) de 4.2.2, y donde $s^2(q_k)/n = s^2(\overline{q})$ es la varianza experimental de la media $\overline{q}$ [ecuación (5) de 4.2.3].

E.3.5 En la terminología tradicional, el tercer término del miembro de la derecha de la ecuación (E.6) se denomina contribución “aleatoria” a la varianza estimada $u^2(z)$, puesto que normalmente decrece a medida que el número de observaciones aumenta, mientras que los dos primeros términos se denominan contribuciones “sistemáticas”, ya que no dependen de n.

De forma más significativa, en ciertos tratamientos tradicionales de la incertidumbre de medida, la ecuación (E.6) sería cuestionable, puesto que no establece distinción entre las incertidumbres provenientes de efectos sistemáticos y las provenientes de efectos aleatorios. En particular, se desaconseja la composición de varianzas obtenidas a partir de distribuciones *a priori* de probabilidad, con las obtenidas a partir de distribuciones de frecuencia, puesto que el concepto de probabilidad se considera de aplicación *únicamente* a los sucesos que pueden ser repetidos un gran número de veces, esencialmente en las mismas condiciones, indicando la probabilidad p del suceso ($0 \leq p \leq 1$) la *frecuencia relativa* con la que se produce el mismo.

En contraste con el punto de vista de la probabilidad basada en la frecuencia, otro punto de vista también válido es el de la probabilidad como medida del *grado de credibilidad* que se tiene en que un suceso ocurra [13, 14]. Por ejemplo, supongamos que un apostante racional tiene la oportunidad de ganar una pequeña suma de dinero D. El grado de credibilidad en la ocurrencia del suceso A es p = 0,5, si nos son indiferentes las dos posibles opciones del apostante:

(1) que obtenga D si se produce el suceso A, y nada si no se produce;

(2) que obtenga D si el suceso A no se produce, y nada si se produce.

La Recomendación INC-1 (1980) sobre la que se basa esta *Guía* adopta implícitamente tal aproximación a la probabilidad, ya que considera las expresiones tales como la ecuación (E.6) como el medio más conveniente de calcular la incertidumbre típica combinada del resultado de una medición.

E.3.6 La adopción de una interpretación de la probabilidad fundamentada en el grado de credibilidad, la desviación típica (incertidumbre típica) y la ley de propagación de la incertidumbre [ecuación (E.3)] como bases para evaluar y expresar la incertidumbre de medida, tal como ya se ha visto en esta *Guía*, posee tres ventajas distintas:

a) la ley de propagación de la incertidumbre permite la fácil incorporación de la incertidumbre típica combinada de un resultado único, a la evaluación de la incertidumbre típica combinada de otro resultado para cuya obtención se requiere el primero;

b) la incertidumbre típica combinada puede servir de base para el cálculo de intervalos que correspondan de forma realista a los niveles de confianza exigidos, y

c) no es necesario clasificar las componentes en “aleatorias” o “sistemáticas” (o de cualquier otra manera) a la hora de evaluar la incertidumbre, puesto que todas las componentes de la incertidumbre son tratadas de la misma forma.

La ventaja c) es particularmente favorable puesto que la clasificación que se menciona es frecuente fuente de confusión; una componente de incertidumbre no es ni “aleatoria” ni “sistemática”. Su naturaleza viene condicionada por la utilización que se haga de la magnitud correspondiente o, más formalmente, por el contexto en que la magnitud aparece, dentro del modelo matemático que describe la medición. En consecuencia, cuando la magnitud correspondiente se utiliza en un contexto diferente, una componente “aleatoria” puede convertirse en “sistemática” y viceversa.

E.3.7 Por la razón apuntada anteriormente en c), la Recomendación INC-1 (1980) no clasifica las componentes de la incertidumbre en “aleatorias” o “sistemáticas”. De hecho, en lo que respecta al cálculo de la incertidumbre típica combinada de un resultado de medida, no es necesaria una clasificación de las componentes de la incertidumbre; es más, no es realmente necesario adoptar esquema de clasificación alguno. No obstante, puesto que a veces es cómodo disponer de categorías, de cara a la comunicación y a la presentación de ideas, la Recomendación INC-1 (1980) proporciona un esquema de clasificación según dos métodos distintos para la evaluación de las componentes de la incertidumbre, el “A” y el “B” (véase 0.7, 2.3.2 y 2.3.3).

El hecho de clasificar los métodos utilizados para la evaluación de las componentes de incertidumbre, en lugar de clasificar las propias componentes, evita el problema de que la clasificación de una componente pudiera depender de la utilización que se hiciera de la magnitud correspondiente. Sin embargo, la clasificación de los métodos, mejor que la de las componentes, no impide colocar las componentes individuales evaluadas por los dos métodos en grupos específicos para un uso particular, en una medición dada, por ejemplo, cuando se compara la variabilidad observada experimentalmente con la pronosticada teóricamente para los valores de salida de un sistema de medida complejo (véase 3.4.3).

E.4 La desviación típica como medida de la incertidumbre

E.4.1 La ecuación (E.3) exige que la incertidumbre de la estimación de una magnitud de entrada se evalúe en forma de incertidumbre típica; es decir, en forma de desviación típica estimada, cualquiera que sea la forma en que se obtenga. Si, en lugar de esto, se toma cualquier otra alternativa considerada como más segura, ésta no podrá utilizarse en la ecuación (E.3). En particular, si en la ecuación (E.3) se utiliza el “límite máximo de error” (la mayor desviación concebible respecto a la mejor estimación supuesta), la incertidumbre resultante tendrá un significado mal definido y será inutilizable por cualquiera que desee introducirla en cálculos ulteriores de incertidumbres, para otras magnitudes (véase E.3.3).

E.4.2 Cuando la incertidumbre típica de una magnitud de entrada no puede evaluarse mediante análisis de los resultados de un número conveniente de observaciones repetidas, debe adoptarse una distribución de probabilidad basada en un conocimiento mucho más restringido de lo que sería deseable. No obstante, este hecho no invalida ni convierte en no realista dicha distribución. Simplemente, como todas las distribuciones de probabilidad, representará el conocimiento disponible.

E.4.3 Las evaluaciones basadas en observaciones repetidas no son necesariamente más válidas que las obtenidas por otros medios. Consideremos $s(\overline{q})$, desviación típica experimental de la media de n observaciones independientes q_k de una variable aleatoria q distribuida normalmente [véase ecuación (5) de 4.2.3]. La magnitud $s(\overline{q})$ es un estadístico (véase C.2.23) que estima $\sigma(\overline{q})$, desviación típica de la distribución de probabilidad de $\overline{q}$; es decir, desviación típica de la distribución de valores de $\overline{q}$ que se obtendrían si la medición se repitiera un número infinito de veces. La varianza $\sigma^2\left[s(\overline{q})\right]$ de $s(\overline{q})$ viene dada aproximadamente por

$$\sigma^2\left[s(\overline{q})\right] \approx \sigma^2(\overline{q})/(2\nu) \tag{E.7}$$

donde $\nu = n - 1$ es el número de grados de libertad de $s(\overline{q})$ (véase G.3.3). Entonces, la desviación típica relativa de $s(\overline{q})$, dada por el cociente σ [s($\overline{q}$)] /σ ($\overline{q}$), y que puede ser considerada como una medida de la incertidumbre relativa de $s(\overline{q})$, es aproximadamente igual a $\left[2(n-1)\right]^{-1/2}$. Esta “incertidumbre de la incertidumbre” de $\overline{q}$, que aparece por razones puramente estadísticas, debido a la limitación efectiva del muestreo, puede ser extraordinariamente grande; para n = 10 observaciones, es igual al 24 %. La tabla E.1 da este valor y algunos otros, y muestra que la desviación típica de una desviación típica estimada estadísticamente no es despreciable para valores prácticos de n. En consecuencia, puede concluirse que las evaluaciones Tipo A de la incertidumbre típica no son necesariamente más fiables que las evaluaciones Tipo B y que, en numerosas situaciones prácticas de medida, en que el número de observaciones es limitado, las componentes obtenidas por evaluación Tipo B pueden conocerse mejor que las obtenidas a partir de evaluaciones Tipo A.

E.4.4 Se ha argumentado que mientras que las incertidumbres asociadas a la aplicación de un método de medida particular son parámetros estadísticos que caracterizan variables aleatorias, existen casos de “efecto sistemático verdadero” en los que la incertidumbre debe ser tratada de forma diferente. Puede darse como ejemplo el de un desfase (offset) de valor fijo desconocido, igual para todas las determinaciones realizadas por un mismo método, debido a una posible imperfección en el propio principio del método o en una de sus hipótesis subyacentes. Ahora bien, si se constata la posible existencia de tal desfase, y se supone que su valor puede ser significativo, entonces podrá ser descrito mediante una función de distribución, aunque esta sea muy simple, basada en el conocimiento que ha permitido llegar a la conclusión de que dicho desfase puede existir y ser significativo. Así, si se considera la probabilidad como una medida del grado de credibilidad de que ocurra un suceso, la contribución de un efecto sistemático tal puede ser incluida en la incertidumbre típica combinada de un resultado de medida, evaluándose como una incertidumbre típica de una función de distribución supuesta *a priori*, siendo tratada de la misma forma que cualquier otra incertidumbre típica de una magnitud de entrada.

EJEMPLO La especificación de un método particular requiere que cierta magnitud de entrada se calcule a partir de un desarrollo en serie de potencias específicas, cuyos términos de mayor grado no se conocen con exactitud. El efecto sistemático debido al hecho de no poder tratar exactamente dichos términos supone un desplazamiento fijo desconocido, que no puede ser muestreado mediante repetición del método operativo. En consecuencia, si se sigue estrictamente una interpretación de la probabilidad basada en la frecuencia, la incertidumbre asociada a dicho efecto no puede ser evaluada e incluida en la incertidumbre del resultado de medida final. Sin embargo, la interpretación de la probabilidad como basada en el grado de credibilidad, permite la evaluación de la incertidumbre que caracteriza dicho efecto a partir de una función de distribución *a priori* (deducida del conocimiento disponible, derivado de los términos conocidos de forma inexacta), y su inclusión en el cálculo de la incertidumbre típica combinada del resultado de medida, como cualquier otra incertidumbre.

Tabla E.1 La desviación típica relativa de la desviación típica experimental de la media $\overline{q}$ de n observaciones independientes de una variable aleatoria q distribuida según una ley normal, respecto a la desviación típica de la media[(a) (b)] es: $\sigma\left[s(\overline{q})\right]/\sigma(\overline{q})$

Número de observaciones n	$\sigma\left[s(\overline{q})\right]/\sigma(\overline{q})$ (en tanto por ciento)
2	76
3	52
4	42
5	36
10	24
20	16
30	13
50	10

(a) Los valores dados han sido calculados a partir de la expresión exacta de $\sigma\left[s(\overline{q})\right]/\sigma(\overline{q})$, y no a partir de la expresión aproximada $\left[2(n-1)\right]^{-1/2}$.

(b) En la expresión $\sigma\left[s(\overline{q})\right]/\sigma(\overline{q})$, el denominador $\sigma(\overline{q})$ es el valor esperado $E\left[S/\sqrt{n}\right]$ y el numerador $\sigma\left[s(\overline{q})\right]$ es la raíz cuadrada de la varianza $V\left[S/\sqrt{n}\right]$, donde S es la variable aleatoria igual a la desviación típica de n variables aleatorias X_1, …, X_n, que siguen una distribución normal de valor medio μ y varianza σ^2:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}\,, \quad \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

El valor esperado y la varianza de S vienen dados por:

$$E[S] = \sqrt{\frac{2}{n-1}}\,\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma\left[(n-1)/2\right]}\sigma, \quad V[S] = \sigma^2 - E[S]^2$$

Donde $\Gamma(x)$ es la función gamma. Para un número finito n, se cumple que $E[S] < \sigma$.

E.5 Comparación entre los dos puntos de vista sobre la incertidumbre.

E.5.1 El objetivo de esta *Guía* se refiere al resultado de medida y a la evaluación de su incertidumbre, más que a las magnitudes desconocidas valor “verdadero” y error (véase anexo D). Adoptando el punto de vista operativo de que el resultado de una medición es simplemente el valor a atribuir al mensurando, y que la incertidumbre de ese resultado es una medida de la dispersión de los valores que podrían ser razonablemente atribuidos al mensurando, esta *Guía* acaba con la confusa ligazón, frecuentemente existente, entre la incertidumbre y las magnitudes desconocidas valor “verdadero” y error.

E.5.2 Esta ligazón puede explicarse interpretando la demostración de la ecuación (E.3), la ley de propagación de la incertidumbre, desde el punto de vista del valor “verdadero” y del error. En este caso, se considera μ_i como el valor “verdadero” único, desconocido, de la magnitud de entrada w_i, y se supone que cada w_i está ligada a su valor “verdadero” μ_i mediante la relación $w_i = \mu_i + \varepsilon_i$, donde ε_i es el error en w_i. La esperanza matemática de la función de distribución de cada ε_i se supone igual a cero, $E(\varepsilon_i) = 0$, con la varianza $E(\varepsilon_i^2) = \sigma_i^2$. La ecuación (E.1) se trasforma entonces en

$$\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial w_i}\varepsilon_i \qquad \text{(E.8)}$$

donde $\varepsilon_z = z - \mu_z$ es el error en z, y μ_z es el valor "verdadero" de z. Si se calcula la esperanza matemática del cuadrado de ε_z, se obtiene una ecuación formalmente idéntica a la ecuación (E.3), pero en la que $\sigma_z^2 = E(\varepsilon_z^2)$ es la varianza de ε_z y $\rho_{ij} = \nu(\varepsilon_i, \varepsilon_j)/(\sigma_i^2\ \sigma_j^2)^{½}$ es el coeficiente de correlación de ε_i, y ε_j, donde $\nu(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i\ \varepsilon_j)$ es la covarianza de ε_i y ε_j. Las varianzas y coeficientes de correlación están entonces asociados a los *errores* en las magnitudes de entrada, más que a las propias magnitudes de entrada.

NOTA Se supone que se considera la probabilidad como una medida del grado de credibilidad acerca de la aparición de un suceso, lo que implica que un error sistemático puede ser tratado de la misma forma que uno aleatorio y que ε_i representa tanto a uno como a otro.

E.5.3 En la práctica, la diferencia en cuanto al punto de vista adoptado no conduce a una diferencia en el valor numérico del resultado de medida, o en el valor de la incertidumbre que afecta a dicho resultado.

En primer lugar, en ambos casos, se utilizan las mejores estimaciones disponibles de las magnitudes de entrada w_i para obtener la mejor estimación de z a partir de la función f; el que las mejores estimaciones sean consideradas como los valores más verosímiles a atribuir a las magnitudes en cuestión, o a sus valores "verdaderos", no entraña diferencia alguna *en los cálculos*.

En segundo lugar, dado que $\varepsilon_i = w_i - \mu_i$, y que las μ_i representan valores fijos, únicos y, en consecuencia, sin incertidumbre, las varianzas y las desviaciones típicas de los ε_i y de los w_i son idénticas. Esto significa que, en los dos casos, las incertidumbres típicas utilizadas como estimaciones de las desviaciones típicas σ_i para obtener la incertidumbre típica combinada del resultado de medida, son idénticas y darán el mismo valor numérico para la incertidumbre. De nuevo, no existirá diferencia alguna *en los cálculos*, según que una incertidumbre típica sea considere como medida de dispersión de la función de distribución de probabilidad de una magnitud de entrada, o como medida de dispersión de la función de distribución de probabilidad del error de esa magnitud.

NOTA Si no se hiciera la hipótesis de la nota de E.5.2, la discusión de este párrafo no tendría sentido, a menos que todas las estimaciones de las magnitudes de entrada, y las incertidumbres de dichas estimaciones hubieran sido obtenidas a partir del análisis estadístico de observaciones repetidas; es decir, a partir de evaluaciones Tipo A.

E.5.4 Aunque la aproximación basada en el valor "verdadero" y el error da los mismos resultados numéricos que la aproximación seguida en esta *Guía* (siempre y cuando se haga la hipótesis de la nota de E.5.2), el concepto de incertidumbre desarrollado en la *Guía* elimina la confusión entre error e incertidumbre (véase anexo D). En efecto, la aproximación operativa de la presente *Guía*, en la que el acento está puesto en la variabilidad observada (o estimada) de una magnitud y en la variabilidad observada (o estimada) de dicho valor, hace totalmente innecesaria cualquier referencia al concepto de error.

Anexo F

Guía práctica sobre la evaluación de componentes de incertidumbre

Este anexo proporciona sugerencias adicionales para la evaluación de componentes de incertidumbre, principalmente de naturaleza práctica, que tratan de complementar a las ya dadas en el Capítulo 4.

F.1 Componentes evaluadas a partir de observaciones repetidas: evaluación Tipo A de la incertidumbre típica

F.1.1 Azar y observaciones repetidas

F.1.1.1 Las incertidumbres determinadas a partir de observaciones repetidas se consideran frecuentemente como “objetivas”, “estadísticamente rigurosas”, etc., en contraste a las evaluadas por otros medios. Esto significa, erróneamente, que pueden evaluarse mediante la mera aplicación de fórmulas estadísticas a las observaciones, y que su evaluación no requiera la aplicación de juicio alguno.

F.1.1.2 La primera pregunta que debemos formularnos es “¿hasta qué punto las observaciones repetidas son repeticiones completamente independientes del procedimiento de medida?” Si todas las observaciones se realizan sobre la misma muestra, y el muestreo forma parte del procedimiento de medida porque el mensurando es la propiedad de un material (y no la propiedad de un espécimen dado de dicho material), entonces las observaciones no se repiten de forma independiente. En este caso, a la varianza observada en las repeticiones hechas sobre la muestra única, debe añadirse una evaluación de la componente de la varianza procedente de las posibles diferencias existentes entre las muestras.

Si la puesta a cero de un instrumento forma parte del procedimiento de medida, el instrumento debe ponerse a cero en cada repetición, incluso si existe una pequeña deriva despreciable durante el periodo en que se efectúan las observaciones, puesto que existe una incertidumbre atribuible a la puesta a cero, que puede ser potencialmente determinada estadísticamente.

De forma análoga, si va a leerse un barómetro, la lectura deberá hacerse en cada repetición de la medición (preferiblemente después de haber perturbado el barómetro y haberle dado tiempo de retornar a su punto de equilibrio), puesto que puede existir una variación, tanto de indicación como de lectura, incluso si la presión atmosférica se mantiene constante.

F.1.1.3 A continuación debemos plantearnos si la totalidad de las influencias que se suponen aleatorias, realmente lo son. ¿Son constantes las medias y las varianzas de las distribuciones, o quizás existe una deriva en el valor de una magnitud de influencia no medida, durante el periodo de repetición de las observaciones? Si existe un número suficiente de observaciones, pueden calcularse las medias aritméticas de los resultados de las mitades inicial y final del periodo, así como sus desviaciones típicas experimentales, pudiendo compararse ambas medias entre sí para juzgar si su diferencia es estadísticamente significativa como para deducir que existe algún efecto función del tiempo.

F.1.1.4 Si los valores de “servicios comunes” del laboratorio (tensión y frecuencia eléctricas, presión y temperatura del agua, presión de nitrógeno, etc.) son magnitudes de influencia, no deberá pasarse por alto la componente fuertemente no aleatoria que normalmente existe en sus variaciones.

F.1.1.5 Si la última cifra significativa de una indicación digital varía continuamente durante una observación, debido al “ruido”, es difícil no seleccionar involuntariamente valores personalmente preferidos de dicha cifra. Es preferible entonces establecer algún medio para congelar la indicación en un instante arbitrario y registrar dicho resultado.

F.1.2 Correlaciones

La mayor parte de lo que se expone en este apartado es también aplicable a las evaluaciones Tipo B de la incertidumbre típica.

F.1.2.1 La covarianza asociada a las estimaciones de dos magnitudes de entrada X_i y X_j puede considerarse igual a cero o ignorarse si

a) X_i y X_j *no están correlacionadas* (las variables aleatorias, no las magnitudes físicas, que se suponen invariables, véase 4.1.1, nota 1), por ejemplo, por medirse de forma repetida pero no simultánea, en ensayos independientes y *diferentes*, o por representar magnitudes resultantes de evaluaciones *diferentes*, hechas independientemente, o si

b) una de las magnitudes X_i o X_j puede ser tratada como constante, o si

c) no se posee información suficiente como para evaluar la covarianza asociada a las estimaciones de X_i y X_j.

NOTA 1 En ciertos casos, como en el ejemplo de la resistencia de referencia de la nota 1 de 5.2.2, es claro que las magnitudes de entrada están completamente correlacionadas y que las incertidumbres típicas de sus estimaciones se combinan linealmente.

NOTA 2 Ensayos diferentes pueden no ser independientes si, por ejemplo, se utiliza el mismo instrumento en ambos (véase F.1.2.3).

F.1.2.2 La existencia de correlación entre dos magnitudes de entrada observadas de forma repetida y simultánea puede determinarse con ayuda de la ecuación (17) de 5.2.3. Por ejemplo, si la frecuencia de un oscilador, con compensación nula o pobre de la temperatura, es una magnitud de entrada, la temperatura ambiente es otra magnitud de entrada, y ambas magnitudes se observan simultáneamente, puede existir una correlación significativa que se evidenciará mediante el cálculo de la covarianza entre la frecuencia del oscilador y la temperatura ambiente.

F.1.2.3 En la práctica, las magnitudes de entrada están a menudo correlacionadas, si en la estimación de sus valores se utiliza el mismo patrón físico, instrumento de medida, dato de referencia, o incluso el mismo método de medida, con una incertidumbre significativa. Sin pérdida de generalidad, supongamos que dos magnitudes de entrada X_1 y X_2 estimadas por x_1 y x_2 dependen de un conjunto de variables no correlacionadas $Q_1, Q_2, ..., Q_L$. Entonces, $X_1 = F(Q_1, Q_2, ..., Q_L)$ y $X_2 = G(Q_1, Q_2, ..., Q_L)$, pudiendo aparecer algunas de las variables únicamente en una de las funciones y no en la otra. Si $u^2(q_l)$ es la varianza estimada asociada a la estimación q_l de Q_l, entonces la varianza estimada asociada a x_1 es, según la ecuación (10) de 5.1.2,

$$u^2(x_1) = \sum_{l=1}^{L} \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} \right)^2 u^2(q_l) \tag{F.1}$$

con una expresión análoga para $u^2(x_2)$. La covarianza estimada asociada a las x_1 y x_2 viene dada por

$$u(x_1, x_2) = \sum_{l=1}^{L} \frac{\partial F}{\partial q_l} \frac{\partial G}{\partial q_l} u^2(q_l) \tag{F.2}$$

Puesto que únicamente los términos para los que $\partial F / \partial q_l \neq 0$ y $\partial G / \partial q_l \neq 0$, para un l dado, contribuyen a la suma, la covarianza será nula si no existe una variable común a F y a G.

El coeficiente de correlación estimado $r(x_1, x_2)$, asociado a las dos estimaciones x_1 *y* x_2 viene determinado a partir de $u(x_1, x_2)$ [ecuación (F.2)] y de la ecuación (14) de 5.2.2, con $u(x_1)$ calculada a partir de la ecuación (F.1) y $u(x_2)$ a partir de una expresión análoga. [Véase también la ecuación (H.9) de H.2.3]. También es posible, para la covarianza estimada asociada a dos estimaciones de magnitudes de entrada, tener tanto una componente estadística [véase la ecuación (17) de 5.2.3] como una componente evaluada como se ha explicado en el presente apartado.

EJEMPLO 1 Una resistencia patrón R_S se utiliza en la misma medición para determinar tanto una intensidad I como una temperatura t. La corriente se determina midiendo, con un voltímetro digital, la diferencia de potencial en los bornes del patrón; la temperatura se determina midiendo, con un puente de resistencias y el patrón, la resistencia $R_t(t)$ de un sensor de temperatura resistivo calibrado, cuya relación temperatura-resistencia en el rango 15 °C ≤ t ≤ 30 °C viene dada por $t = aR_t^2(t) - t_0$ siendo a y t_0 constantes conocidas. Así, la intensidad viene determinada por la relación $I = V_S / R_S$ y la temperatura por la relación $t = a\beta^2(t)R_S^2 - t_0$, donde $\beta(t)$ es la relación medida $R_t(t) / R_S$, proporcionada por el puente.

Como la magnitud R_S es la única común a las expresiones para I y t, la ecuación (F.2) da para la covarianza de I y t

$$u(I,t) = \frac{\partial I}{\partial R_S}\frac{\partial t}{\partial R_S}u^2(R_S) = \left(-\frac{V_S}{R_S^2}\right)\left[2\alpha\beta^2(t)R_S\right]u^2(R_S) = -\frac{2I(t+t_0)}{R_S^2}u^2(R_S)$$

(Por simplicidad de notación, en este ejemplo se utiliza el mismo símbolo tanto para la magnitud de entrada como para su estimación).

Para obtener el valor numérico de la covarianza, se sustituyen en esta expresión los valores numéricos de las magnitudes medidas I y t, así como los valores de R_S y de $u(R_S)$ dados en el certificado de calibración de la resistencia patrón. Está claro que la unidad de $u(I, t)$ es A·°C, ya que la dimensión de la varianza relativa $[u(R_S)/R_S]^2$ es igual a la unidad (esta última es pues una magnitud sin dimensión o adimensional).

Supongamos además una magnitud P relacionada con las magnitudes de entrada I y t mediante la ecuación $P = C_0 I^2/(T_0+t)$, donde C_0 y T_0 son constantes conocidas, con incertidumbre despreciable $[u^2(C_0) \approx 0,\ u^2(T_0) \approx 0]$. Aplicando la ecuación (13) de 5.2.2, para la varianza de P en función de las varianzas de I, de t y de su covarianza, se obtiene

$$\frac{u^2(P)}{P^2} = 4\frac{u^2(I)}{I^2} - 4\frac{u(I,t)}{I(T_0+t)} + \frac{u^2(t)}{(T_0+t)^2}$$

Las varianzas $u^2(I)$ y $u^2(t)$ se obtienen aplicando la ecuación (10) de 5.1.2 a las relaciones $I = V_S / R_S$ y $t = a\beta^2(t)R_S^2 - t_0$.
Los resultados son

$$u^2(I)/I^2 = u^2(V_S)/V_S^2 + u^2(R_S)/R_S^2$$

$$u^2(t) = 4(t+t_0)^2u^2(\beta)/\beta^2 + 4(t+t_0)^2u^2(R_S)/R_S^2$$

donde, por simplicidad, se supone que las incertidumbres de las constantes t_0 y a son también despreciables. Estas expresiones pueden evaluarse de forma sencilla, ya que $u^2(V_S)$ y $u^2(\beta)$ pueden determinarse, respectivamente, a partir de las lecturas repetidas del voltímetro y del puente de resistencias. Naturalmente, a la hora de determinar $u^2(V_S)$ y $u^2(\beta)$ es necesario tener en cuenta las incertidumbres inherentes a los propios instrumentos y procedimientos de medida empleados.

EJEMPLO 2 En el ejemplo de la nota 1 de 5.2.2, supongamos que la calibración de cada resistencia venga representada por $R_i = \alpha_i R_S$, siendo $u(\alpha_i)$ la incertidumbre típica de la relación α_i medida, obtenida a partir de observaciones repetidas. Supongamos además que $\alpha_i \approx 1$ para cada resistencia, y que $u(\alpha_i)$ sea prácticamente la misma para cada calibración, de forma que $u(\alpha_i) \approx u(\alpha)$. Entonces, las ecuaciones (F.1) y (F.2) dan $u^2(R_i)=R_S^2u^2(\alpha)+u^2(R_S)$ y $u(R_i, R_j)= u^2(R_S)$. Esto supone, según la ecuación (14) de 5.2.2, que el coeficiente de correlación de dos resistencias cualesquiera ($i \neq j$) es:

$$r(R_i, R_j) \equiv r_{ij} = \left\{1 + \left[\frac{u(\alpha)}{u(R_S)/R_S}\right]^2\right\}^{-1}$$

Dado que $u(R_S) / R_S = 10^{-4}$, si $u(\alpha) = 100 \times 10^{-6}$, $r_{ij} \approx 0{,}5$; si $u(\alpha) = 10 \times 10^{-6}$, $r_{ij} \approx 0{,}990$; y si $u(\alpha) = 1 \times 10^{-6}$, $r_{ij} \approx 1{,}000$. O sea, cuando $u(\alpha) \to 0$, $r_{ij} \to 1$ y $u(R_i) \to u(R_S)$.

NOTA En general, en las calibraciones por comparación como las de este ejemplo, los valores estimados de los elementos en calibración se encuentran correlacionados, con un grado de correlación dependiente de la relación existente entre la incertidumbre de la comparación y la incertidumbre del patrón de referencia. Cuando, como ocurre frecuentemente en la práctica, la incertidumbre de la comparación es despreciable frente a la incertidumbre del patrón, los coeficientes de correlación son iguales a +1, y la incertidumbre de cada elemento en calibración es la misma que la del patrón.

F.1.2.4 Puede pasarse por alto la introducción de la covarianza $u(x_i,x_j)$ siempre que el conjunto original de magnitudes de entrada X_1, X_2, ..., X_N, de las que depende el mensurando Y [véase ecuación (1) de 4.1] se redefina de forma que considere adicionalmente como magnitudes de entrada independientes, las magnitudes Q_l que son comunes a dos o más de las X_i originales (puede ser necesario efectuar mediciones complementarias para establecer completamente la relación entre las Q_l y las X_i afectadas). Sin embargo, en determinadas situaciones, puede ser más cómodo mantener las covarianzas, en lugar de incrementar el número de magnitudes de entrada. Un tratamiento análogo puede aplicarse a las covarianzas observadas como resultado de observaciones simultáneas y repetidas [véase ecuación (17) de 5.2.3], aunque la identificación de las magnitudes de entrada complementarias apropiadas es con frecuencia algo artificial, sin razones físicas de peso.

EJEMPLO Si en el ejemplo 1 de F.1.2.3 se introducen en la expresión de P las expresiones de I y t en función de R_{S}, el resultado es:

$$P = \frac{C_0 V_{\mathrm{S}}^2}{R_{\mathrm{S}}^2 \left[T_0 + a\beta^2(t) R_{\mathrm{S}}^2 - t_0\right]}$$

evitándose así la correlación entre I y t, a base de reemplazar dichas magnitudes de entrada por las magnitudes V_{S}, R_{S} y β. Como estas magnitudes no están correlacionadas, la varianza de P puede obtenerse a partir de la ecuación (10) de 5.1.2.

F.2 Componentes evaluadas por otros medios: evaluación Tipo B de la incertidumbre típica

F.2.1 La necesidad de evaluaciones Tipo B

Si un laboratorio de medición dispusiera de recursos y tiempo ilimitados, podría efectuar una investigación estadística exhaustiva de todas las causas de incertidumbre imaginables; por ejemplo, utilizando instrumentos de diferentes tipos y fabricantes, diferentes métodos de medida, diferentes modos de aplicación del método y diferentes aproximaciones en sus modelos teóricos de medición. Las incertidumbres asociadas a todas estas causas podrían entonces evaluarse mediante análisis estadístico de series de observaciones, y la incertidumbre debida a cada causa podría caracterizarse estadísticamente mediante una desviación típica. En otras palabras, todas las componentes de la incertidumbre se obtendrían mediante evaluaciones Tipo A. Como tal estudio no es económicamente viable, muchas componentes de la incertidumbre deben evaluarse por otros métodos más prácticos.

F.2.2 Distribuciones determinadas matemáticamente

F.2.2.1 Resolución de una indicación digital

Una de las fuentes de incertidumbre de un instrumento digital es la resolución de su dispositivo indicador. Aunque, por ejemplo, las indicaciones repetidas fueran todas idénticas, la incertidumbre de medición atribuible a la repetibilidad no sería cero, puesto que para un campo dado de señales de entrada al instrumento, dentro de un intervalo conocido, se obtendría la misma indicación. Si la resolución del dispositivo indicador es δx, el valor de señal de entrada (estímulo) que produce una indicación dada X puede situarse con igual probabilidad en cualquier punto dentro del intervalo $X-\delta x/2$ a $X+\delta x/2$. La señal de entrada puede describirse entonces mediante una distribución rectangular de probabilidad (véase 4.3.7 y 4.4.5), de amplitud δx y varianza $u^2 = (\delta x)^2/12$, lo que supone una incertidumbre típica $u = 0{,}29\ \delta x$ para cualquier indicación.

Así, un instrumento de pesaje dotado de dispositivo indicador, cuya cifra significativa más pequeña sea igual a 1 g, tiene una varianza debida a la resolución del dispositivo igual a $u^2 = (1/12)\ \mathrm{g}^2$ y una incertidumbre típica igual $u = \left(1/\sqrt{12}\right)\mathrm{g} = 0{,}29\ \mathrm{g}$.

F.2.2.2 Histéresis

Ciertos tipos de histéresis pueden causar un tipo similar de incertidumbre. La indicación de un instrumento puede diferir en una cantidad fija y conocida, según que las lecturas sucesivas sean crecientes o decrecientes. El operador prudente tomará nota del sentido en que se toman las lecturas sucesivas, y hará la corrección apropiada. Pero no siempre es posible observar el sentido de la histéresis: puede haber oscilaciones ocultas dentro del instrumento, alrededor de un punto de equilibrio, de forma que la indicación dependa del sentido final de aproximación a dicho punto. Si el rango de posibles lecturas debidas a esta causa es δx, la varianza es nuevamente $u^2 = (\delta x)^2/12$ y la incertidumbre típica debida a la histéresis es $u = 0{,}29\ \delta x$.

F.2.2.3 Cálculos de precisión limitada

El redondeo o truncamiento de números que tiene lugar en las reducciones automáticas de datos en los ordenadores, también puede constituir una fuente de incertidumbre. Consideremos por ejemplo un ordenador con una longitud de palabra de 16 bits. Si, en el transcurso de los cálculos, un número con esta longitud de palabra se resta de otro del que difiere únicamente en el bit nº 16, el resultado poseerá únicamente un bit significativo. Tales casos pueden producirse en la evaluación de algoritmos “mal estructurados”, siendo difíciles de prever. Puede obtenerse empíricamente una determinación de la incertidumbre, dando pequeños incrementos a la magnitud de entrada más importante de cara al cálculo (frecuentemente una de ellas es proporcional a la magnitud del resultado) hasta que se produzca una variación en la magnitud de salida. La menor variación en la magnitud de salida obtenible de esta forma puede tomarse como una medida de la incertidumbre; si dicha variación es δx, la varianza es $u^2 = (\delta x)^2/12$ y $u = 0{,}29\ \delta x$.

NOTA Puede verificarse la evaluación de la incertidumbre, comparando el resultado del cálculo efectuado en un ordenador de longitud de palabra limitada, con el resultado del mismo cálculo efectuado en otro ordenador de longitud de palabra significativamente mayor.

F.2.3 Valores de entrada de origen externo

F.2.3.1 Un valor *de origen externo* para una magnitud de entrada es aquel que no ha sido estimado en el curso de una medición dada, sino que ha sido obtenido fuera de ésta, como resultado de una evaluación independiente. Tal valor de origen externo viene frecuentemente acompañado por una indicación de algún tipo acerca de su incertidumbre. La incertidumbre puede venir dada, por ejemplo, por una desviación típica, por un múltiplo de ésta, o por la semi-amplitud de un intervalo, con un nivel de confianza dado. Alternativamente, pueden darse los límites superior e inferior, o también no darse ninguna información acerca de la incertidumbre. En este último caso, los usuarios de dicho valor deben emplear su propio conocimiento sobre la probable magnitud de la incertidumbre, en función de la naturaleza de la magnitud, la fiabilidad de la fuente, las incertidumbres obtenidas en la práctica para tales magnitudes, etc.

NOTA La discusión sobre la incertidumbre de las magnitudes de entrada de origen externo se realiza en este apartado sobre la evaluación Tipo B de la incertidumbre típica, por conveniencia; la incertidumbre de una magnitud tal puede incluir componentes obtenidas tanto por evaluaciones Tipo A como Tipo B. Dado que no es necesario distinguir entre sí las componentes evaluadas por los diferentes métodos, para calcular una incertidumbre típica combinada, tampoco es necesario conocer la composición de la incertidumbre de una magnitud de origen externo.

F.2.3.2 Algunos laboratorios de calibración han adoptado la práctica de expresar “la incertidumbre” mediante los límites superior e inferior de un intervalo que posee un nivel de confianza “mínimo”, por ejemplo, “al menos” el 95 %. Esto puede tomarse como ejemplo de lo que se denomina incertidumbre “segura” (véase E.1.2), la cual no puede transformarse en una incertidumbre típica, sin conocer previamente cómo ha sido calculada. Si se dispone de suficiente información, puede recalcularse siguiendo las reglas de esta *Guía*; si no es así, deberá realizarse una evaluación independiente de la incertidumbre, por cualquier otro medio disponible.

F.2.3.3 Algunas incertidumbres se dan simplemente como límites extremos entre los que están comprendidos *todos* los valores de la magnitud. La práctica habitual es suponer que todos los valores comprendidos entre dichos límites son igualmente probables (función de distribución rectangular), pero no podría adoptarse tal hipótesis si existieran razones para suponer que los valores situados dentro, pero cerca de los límites, son menos probables que los situados en el centro del intervalo. Una distribución rectangular de semi-amplitud a tiene una varianza igual a $a^2/3$; una distribución normal, para la que a es la semi-amplitud del intervalo de nivel de confianza 99,73 %, tiene una varianza igual a $a^2/9$. Puede ser prudente llegar a un compromiso entre ambos valores suponiendo, por ejemplo, que la función de distribución de probabilidad es triangular, con varianza igual a $a^2/6$ (véanse 4.3.9 y 4.4.6).

F.2.4 Valores de entrada medidos

F.2.4.1 Observación única, instrumentos calibrados.

Si una estimación de entrada se ha obtenido a partir de una única observación, con un instrumento determinado, calibrado respecto a un patrón de baja incertidumbre, la incertidumbre de la estimación es principalmente una incertidumbre de repetibilidad. La varianza de las medidas repetidas con el mismo instrumento puede haber sido obtenida en una ocasión anterior, no necesariamente para el mismo valor actual de lectura, pero sí para un valor lo suficientemente próximo como para ser útil, siendo admisible la aplicación de esta varianza al valor de entrada en cuestión. Si no se dispone de tal información, debe realizarse una estimación basada en la naturaleza del aparato o instrumento de medida, las varianzas conocidas de otros instrumentos de construcción análoga, etc.

F.2.4.2 Observación única, instrumentos verificados.

No todos los instrumentos de medida vienen acompañados de un certificado de calibración o de una curva de calibración. La mayor parte de ellos, sin embargo, se construyen conforme a alguna norma escrita, verificándose dicha conformidad, bien por el fabricante, bien por una autoridad independiente. Habitualmente, la norma contiene exigencias metrológicas, frecuentemente en forma de “errores máximos permitidos”, que deben cumplir los instrumentos. La conformidad del instrumento con estas exigencias se realiza mediante comparación con un instrumento de referencia, cuya incertidumbre máxima permitida viene habitualmente especificada en la norma. Esta incertidumbre es pues una componente de la incertidumbre del instrumento verificado.

Si no se sabe nada acerca de la curva de error característica del instrumento verificado, puede suponerse que existe una probabilidad igual de que el error tome cualquier valor dentro de los límites permitidos; es decir, una distribución de probabilidad rectangular. Sin embargo, algunos tipos de instrumentos poseen curvas características tales que los errores son, por ejemplo, probablemente siempre positivos en una zona del campo de medida, y negativos en otras zonas. A veces, este tipo de información puede deducirse del estudio de la norma escrita.

F.2.4.3 Magnitudes bajo control

Las mediciones se efectúan frecuentemente en condiciones de referencia controladas, que se suponen constantes en el curso de una serie de mediciones. Por ejemplo, las mediciones pueden efectuarse sobre muestras situadas en un baño de aceite, cuya temperatura está controlada por un termostato. La temperatura del baño puede medirse al tiempo de realizar la medición sobre cada muestra pero, si la temperatura del baño varía de forma cíclica, la temperatura instantánea de la muestra puede no ser la indicada por el termómetro en el baño. El cálculo de las fluctuaciones de temperatura de la muestra, basado en la teoría de la transferencia de calor, y de sus varianzas, queda fuera del alcance de esta *Guía*, pero debe partir de un ciclo de temperatura conocido o asumido del baño. Este ciclo puede observarse con ayuda de un termopar de precisión y un registrador de temperatura pero, en su defecto, podrá deducirse una aproximación a partir del conocimiento sobre la naturaleza del control.

F.2.4.4 Distribuciones asimétricas de valores posibles

Hay ocasiones en que todos los valores posibles de una magnitud se sitúan a un solo lado de un único valor límite. Por ejemplo, cuando se mide la altura vertical fija h (el mensurando) de un columna de líquido en un manómetro, el eje del dispositivo medidor de la altura puede estar desviado respecto a la vertical un pequeño ángulo β. La distancia l determinada por el dispositivo será siempre *superior* a h, no existiendo valores posibles inferiores a h, ya que h es igual a la proyección $l \cos\beta$, y por tanto $l = h / \cos\beta$, y todos los valores de $\cos\beta$ son inferiores a la unidad; no siendo posible valores mayores de uno. Este error denominado “error de coseno” puede producirse también de forma tal que la proyección $h' \cos\beta$ de un mensurando h' sea igual a la distancia observada l; es decir, $l = h' \cos\beta$, siendo la distancia observada siempre *inferior* al mensurando.

Si se introduce una nueva variable $\delta = 1 - \cos\beta$, las dos situaciones distintas son, suponiendo $\beta \approx 0$ o $\delta << 1$, lo que es habitual en la práctica,

$$h = \bar{l}(1-\delta) \tag{F.3a}$$

$$h' = \bar{l}(1+\delta) \tag{F.3b}$$

Aquí $\bar{l}$, la mejor estimación de l, es igual a la media aritmética de n observaciones repetidas e independientes l_k de l, con varianza estimada $u^2(\bar{l})$ [véanse ecuaciones (3) y (5) de 4.2]. A partir de las ecuaciones (F.3a) y (F.3b) se deduce que para obtener una estimación de h, o de h', es necesaria una estimación del factor de corrección δ, mientras que para obtener la incertidumbre típica combinada de la estimación de h, o de h', es necesaria $u^2(\delta)$, la varianza estimada de δ. Más específicamente, la aplicación de la ecuación (10) de 5.1.2 a las ecuaciones (F.3a) y (F.3b) proporciona, para $u_c^2(h)$ y $u_c^2(h')$ (signos – y + respectivamente)

$$u_c^2 = (1 \mp \delta)^2 u^2(\bar{l}) + \bar{l}^2 u^2(\delta) \approx \tag{F.4a}$$

$$\approx u^2(\bar{l}) + \bar{l}^2 u^2(\delta) \tag{F.4b}$$

Para obtener las estimaciones del valor esperado y de la varianza de δ, supongamos que el eje del dispositivo utilizado para medir la altura de la columna de líquido en el manómetro está forzado a mantenerse en un plano vertical, y que la distribución de los valores del ángulo de inclinación β alrededor de su valor esperado, cero, es una distribución normal con varianza σ^2. Aunque β puede tomar valores positivos o negativos, δ = 1- cosβ es positivo para todos los valores de β. Si se supone que no hay restricción alguna para el alineamiento del eje del dispositivo, la orientación de éste puede variar dentro de un ángulo sólido, ya que también puede desalinearse en azimut, pero β siempre será un ángulo positivo.

En el caso de restricción de β a un plano vertical, caso unidimensional, el elemento de probabilidad $p(\beta)\mathrm{d}\beta$ (nota de C.2.5) es proporcional a $\{\exp[-\beta^2/(2\sigma^2)]\}\mathrm{d}\beta$; en el caso bidimensional, o sin restricción, el elemento de probabilidad es proporcional a $\{\exp[-\beta^2/(2\sigma^2)]\}$ sen$\beta\,\mathrm{d}\beta$. En los dos casos, las expresiones a utilizar en las ecuaciones (F.3) y (F.4) para determinar la esperanza matemática y la varianza de δ, son las funciones de densidad de probabilidad $p(\delta)$. Estas pueden obtenerse fácilmente a partir de estos elementos de probabilidad, ya que el ángulo β puede suponerse pequeño, pudiendo sustituirse δ = 1– cosβ y sen β por los órdenes más bajos de β, de sus desarrollos en serie. Esto da $\delta \approx \beta^2/2$, sen $\beta \approx \beta = \sqrt{2\delta}$, y $\mathrm{d}\beta = \mathrm{d}\delta/\sqrt{2\delta}$. Las funciones de densidad de probabilidad serán entonces

$$p(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi\delta}} \exp(-\delta/\sigma^2) \tag{F.5a}$$

en una dimensión

$$p(\delta) = \frac{1}{\sigma^2} \exp(-\delta/\sigma^2) \tag{F.5b}$$

en dos dimensiones,

con

$$\int_0^\infty p(\delta)\mathrm{d}\delta = 1$$

Las ecuaciones (F.5a) y (F.5b), que muestran que el valor más probable de la corrección δ en los dos casos es cero, proporcionan, en el caso unidimensional $E(\delta) = \sigma^2/2$ y var$(\delta) = \sigma^4/2$ para la esperanza matemática y la varianza de δ y, en el caso bidimensional, $E(\delta) = \sigma^2$ y var$(\delta) = \sigma^4$. Las ecuaciones (F.3a), (F.3b) y (F.4b) quedan transformadas entonces en

$$h = \bar{l}\left[1 - (d/2)u^2(\beta)\right] \tag{F.6a}$$

$$h' = \bar{l}\left[1 + (d/2)u^2(\beta)\right] \tag{F.6b}$$

$$u_c^2(h) = u_c^2(h') = u^2(\bar{l}) + (d/2)\bar{l}^2 u^4(\beta) \qquad \text{(F.6c)}$$

donde d es el número de dimensiones (d = 1 ó 2) y $u(\beta)$ es la incertidumbre típica del ángulo β, tomada como la mejor estimación de la desviación típica σ de una distribución supuesta normal, evaluada a partir de la totalidad de la información disponible, referente a la medición (evaluación Tipo B). Este es un ejemplo de un caso en que la estimación del valor del mensurando depende de la *incertidumbre* de una magnitud de entrada.

Aunque las ecuaciones (F.6a) a (F.6c) sean específicas para una distribución normal, el análisis puede efectuarse asumiendo otras distribuciones para β. Por ejemplo, si se asume que β sigue una distribución rectangular simétrica con $+\beta_0$ y $-\beta_0$ como límites superior e inferior en el caso unidimensional, y $+\beta_0$ y 0 en el caso bidimensional, $E(\delta) = \beta_0^2/6$ y $\mathrm{var}(\delta) = \beta_0^4/45$ en una dimensión, y $E(\delta) = \beta_0^2/4$ y $\mathrm{var}(\delta) = \beta_0^4/48$ en dos dimensiones.

NOTA Esta es una situación en la que el desarrollo de la función $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$ en serie de Taylor de primer orden para obtener $u_c^2(y)$, ecuación (10) de 5.1.2, es inadecuado debido a la no linealidad de f: $\overline{\cos\beta} \neq \cos\bar{\beta}$ (véase Nota de 5.1.2, y H.2.4). Aunque el análisis puede efectuarse enteramente en términos de β, la introducción de la variable δ simplifica el problema.

Otro ejemplo de situación en la que todos los valores posibles de una magnitud se encuentran de un solo lado de un límite único es la determinación, por valoración, de la concentración de un componente en una solución, cuando el punto final viene indicado por el disparo de una señal; la cantidad de reactivo añadido es siempre superior a la que sería necesaria para el disparo, jamás inferior. La cantidad de reactivo en exceso, respecto a la requerida en el punto equivalente, es una variable necesaria para la reducción de los datos y el procedimiento, en este y en otros casos análogos, consiste en asumir una distribución de probabilidad apropiada para la cantidad de reactivo en exceso, y utilizarla para obtener su esperanza matemática y su varianza.

EJEMPLO Si se supone una distribución rectangular de límite inferior cero y límite superior C_0 para la cantidad de reactivo en exceso z, la esperanza matemática del exceso es $C_0/2$ y la varianza asociada $C_0^2/12$. Sin embargo, si se asume una distribución normal para la cantidad de reactivo en exceso z, con $0 \leq z < \infty$; es decir, $p(z) = \left(\sigma\sqrt{\pi/2}\right)^{-1}\exp\left[-z^2/\left(2\sigma^2\right)\right]$, la esperanza matemática es entonces $\sigma\sqrt{2/\pi}$ y la varianza $\sigma^2(1-2/\pi)$.

F.2.4.5 Incertidumbre cuando no se aplican correcciones derivadas de una curva de calibración.

La nota de 6.3.1 presenta el caso en que no se aplica una corrección conocida b de un efecto sistemático significativo al resultado de una medición sino que, en lugar de esto, se toma en cuenta para expandir la "incertidumbre" atribuida al resultado. Se puede, por ejemplo, reemplazar una incertidumbre expandida U por una incertidumbre $U + b$, donde U es la incertidumbre expandida obtenida con la hipótesis de $b = 0$. Esta práctica es seguida a veces en situaciones en las que se dan las condiciones siguientes: el mensurando Y está definido para un campo de valores de un parámetro t, como en el caso de la curva de calibración de un sensor de temperatura; U y b dependen también de t; y además debe darse un único valor de incertidumbre para todas las estimaciones $y(t)$ del mensurando, dentro del campo de valores posibles de t. En tales casos, el resultado de la medición viene dado frecuentemente en la forma $Y(t) = y(t) \pm [U_{max} + b_{max}]$, donde el subíndice "max" indica que se utiliza el valor máximo de U y el valor máximo de la corrección conocida b, en el campo de valores de t.

Aunque esta *Guía* recomienda aplicar las correcciones por efectos sistemáticos identificados como significativos a los resultados de medida, hay situaciones en las que esto no es posible, dado el coste inaceptable que supondría calcular y aplicar una corrección individual, y luego calcular y aplicar una incertidumbre individual a cada valor de $y(t)$.

Una aproximación relativamente simple a este problema, compatible con los principios de esta *Guía*, es la siguiente:

Calcular una corrección media $\bar{b}$ a partir de

$$\bar{b} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} b(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(F.7a)}$$

donde t_1 y t_2 definen el rango de interés del parámetro *t*, y toma como mejor estimación de *Y*(*t*), $y'(t) = y(t) + \bar{b}$, donde *y*(*t*) es la mejor estimación no corregida de *Y*(*t*). La varianza asociada a la corrección media $\bar{b}$ para todo el intervalo viene dada por

$$u^2(\bar{b}) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[b(t) - \bar{b} \right]^2 \,\mathrm{d}t \qquad \text{(F.7b)}$$

no considerándose la incertidumbre de la determinación real de la corrección *b*(*t*). La varianza media de la corrección *b*(*t*) debida a su determinación real viene dada por

$$\overline{u^2[b(t)]} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u^2[b(t)] \,\mathrm{d}t \qquad \text{(F.7c)}$$

donde $u^2[b(t)]$ es la varianza de la corrección *b*(*t*). De forma análoga, la varianza media de *y*(*t*) proveniente de todas las fuentes de incertidumbre distintas de la corrección *b*(*t*) se obtiene a partir de

$$\overline{u^2[y(t)]} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u^2[y(t)] \,\mathrm{d}t \qquad \text{(F.7d)}$$

donde $u^2[y(t)]$ es la varianza de *y*(*t*) debida a todas las fuentes de incertidumbre distintas a *b*(*t*). El valor único de incertidumbre típica a utilizar para todas las estimaciones $y'(t) = y(t) + \bar{b}$ del mensurando *Y*(*t*) es pues la raíz cuadrada positiva de la varianza

$$u_c^2(y') = \overline{u^2[y(t)]} + \overline{u^2[b(t)]} + u^2(\bar{b}) \qquad \text{(F.7e)}$$

Puede obtenerse una incertidumbre expandida *U* multiplicando $u_c(y')$ por un factor de cobertura *k* apropiadamente elegido, tal que $U = k\, u_c(y')$, lo que da $Y(t) = y'(t) \pm U = y(t) + \bar{b} \pm U$. No obstante, no hay que olvidar que se ha utilizado la misma corrección media para todos los valores de *t*, en lugar de la corrección apropiada para cada valor de *t*, siendo necesario indicar claramente lo que representa *U*.

F.2.5 Incertidumbre debida al método de medida

F.2.5.1 Probablemente la componente de incertidumbre más difícil de evaluar sea la asociada al método de medida, en particular si se ha comprobado que la variabilidad de los resultados obtenidos con este método es menor que la obtenida con otro método conocido. Sin embargo, es probable que existan otros métodos, algunos incluso desconocidos o de difícil aplicación, que podrían dar sistemáticamente resultados diferentes, de igual validez aparente. Esto implica una función de distribución *a priori*, y no una distribución de la que poder tomar fácilmente muestras para ser tratadas estadísticamente. Entonces, aunque la incertidumbre del método pueda ser la incertidumbre dominante, la única información frecuentemente disponible para evaluar su incertidumbre típica proviene de lo que conocemos del mundo físico (véase también E.4.4).

NOTA La determinación del mismo mensurando por métodos diferentes, bien en el mismo laboratorio, bien en distintos, o mediante un mismo método, en laboratorios diferentes, suele aportar frecuentemente una información válida sobre la incertidumbre atribuible a un método particular. En general, el intercambio de patrones o de materiales de referencia entre laboratorios, para realizar mediciones independientes, es una forma útil de comprobar la fiabilidad de las evaluaciones de incertidumbre y de identificar efectos sistemáticos no puestos de manifiesto con anterioridad.

F.2.6 Incertidumbre debida a la muestra

F.2.6.1 Numerosas mediciones comportan la comparación de un objeto desconocido con un patrón conocido, de características análogas, para calibrar el objeto desconocido. Como ejemplos están los bloques patrón longitudinales, algunos termómetros, juegos de masas, resistencias y materiales de alta pureza, etc. En la mayor parte de tales casos, los métodos de medida no son especialmente sensibles, ni se ven especialmente afectados, por la selección de la muestra (es decir, por la muestra desconocida particular a calibrar), por el tratamiento de ésta, o por los efectos de diversas magnitudes de influencia ambientales, puesto que la muestra desconocida y el patrón responden generalmente de forma idéntica (y con frecuencia previsible) a estas variables.

F.2.6.2 En algunas situaciones prácticas de medida, el muestreo y el tratamiento de la muestra juegan un papel mucho más importante. Este es frecuentemente el caso del análisis químico de materiales naturales. Contrariamente a los materiales fabricados por el hombre, cuya homogeneidad puede haber sido comprobada a un nivel superior al requerido en la medición, los materiales naturales son a menudo muy inhomogéneos. Esta falta de homogeneidad conduce a dos componentes adicionales de la incertidumbre. La evaluación de la primera componente requiere determinar hasta qué punto la muestra seleccionada representa correctamente al material objeto del análisis. La evaluación de la segunda componente requiere determinar en qué medida los constituyentes secundarios (no analizados) influyen sobre la medición y en qué grado son adecuadamente tratados por el método de medida.

F.2.6.3 En algunos casos, un diseño cuidadoso del experimento puede hacer posible la evaluación estadística de la incertidumbre debida a la muestra (véanse H.5 y H.5.3.2). No obstante, habitualmente, en especial cuando las magnitudes de influencia ambientales tienen efectos significativos sobre la muestra, es necesario recurrir a la competencia y a los conocimientos del analista, derivados de su experiencia, y considerar toda la información práctica de que se dispone, para evaluar la incertidumbre.

Anexo G

Grados de libertad y niveles de confianza

G.1 Introducción

G.1.1 Este anexo aborda el problema general de la obtención, a partir de la estimación y del mensurando Y, y de la incertidumbre típica combinada $u_c(y)$ de dicha estimación, una incertidumbre expandida $U_p = k_p\, u_c(y)$ que define un intervalo $y - U_p \leq Y \leq y + U_p$ que posee una alta probabilidad de cobertura especificada o nivel de confianza p. Este anexo trata pues de la forma de determinar el factor de cobertura k_p que produce un intervalo, en torno al resultado de medida y, que se espera comprenda una fracción p especificada, amplia, de la distribución de valores que pueden ser razonablemente atribuidos al mensurando Y (véase capítulo 6).

G.1.2 En la mayoría de las situaciones prácticas de medida, el cálculo de intervalos con niveles especificados de confianza, en realidad, la estimación de la mayor parte de las componentes individuales de la incertidumbre en tales situaciones es, en el mejor de los casos, aproximado. Incluso la desviación típica experimental de la media, a partir de un número tan elevado de observaciones repetidas como 30, para una magnitud descrita por una distribución normal, tiene una incertidumbre de alrededor de un 13% (véase tabla E.1 del anexo E).

En numerosos casos, no tiene sentido tratar de hacer la distinción entre, por ejemplo, un intervalo con un nivel de confianza del 95% (una posibilidad sobre 20 de que el valor del mensurando Y esté situado fuera del intervalo) y un intervalo del 94 % ó 96 % (una posibilidad sobre 17 o sobre 25, respectivamente). La obtención de intervalos con niveles de confianza del 99 % (una posibilidad sobre 100) y superiores, es particularmente difícil, incluso asumiendo que no se ha pasado por alto ningún efecto sistemático puesto que, en general, se posee muy poca información acerca de los extremos o “colas” de las distribuciones de probabilidad de las magnitudes de entrada.

G.1.3 La obtención del valor del factor de cobertura k_p que proporciona un intervalo correspondiente a un nivel de confianza especificado p, requiere poseer un conocimiento detallado de la distribución de probabilidad caracterizada por el resultado de medida y su incertidumbre típica combinada. Por ejemplo, para una magnitud z descrita por una distribución normal, de esperanza matemática μ_z y desviación típica σ, es fácil calcular el valor de k_p que proporciona un intervalo $\mu_z \pm k_p\sigma$ que comprende la fracción p de la distribución, con una probabilidad o nivel de confianza p. La tabla G.1 presenta algunos ejemplos.

Tabla G.1 — Valor del factor de cobertura k_p que proporciona un intervalo correspondiente a un nivel de confianza p, suponiendo una distribución normal.

Nivel de confianza p (en porcentaje)	Factor de cobertura k_p
68,27	1
90	1,645
95	1,960
95,45	2
99	2,576
99,73	3

NOTA Comparativamente, si z viene descrita por una distribución rectangular de esperanza matemática μ_z y desviación típica $\sigma = a/\sqrt{3}$, donde a es la semi-amplitud de la distribución, el nivel de confianza p es 57,74 % para $k_p = 1$; 95 % para $k_p = 1{,}65$; 99 % para $k_p = 1{,}71$ y 100 % para $k_p \geq \sqrt{3} = 1{,}73$. La distribución rectangular es “más estrecha” que la distribución normal, en cuanto que su extensión es finita y no posee “colas”.

G.1.4 Si se conocen las distribuciones de probabilidad de las magnitudes de entrada $X_1, X_2, ..., X_N$, de las que depende el mensurando Y [sus esperanzas matemáticas, varianzas y momentos de mayor orden (véanse C.2.13

y C.2.22) si las distribuciones no son normales] y si Y es una función lineal de las magnitudes de entrada; es decir, $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + ...+ c_NX_N$, la distribución de probabilidad de Y puede entonces obtenerse mediante convolución de las distribuciones de probabilidad individuales [10]. Los valores de k_p que proporcionan intervalos correspondientes a niveles de confianza específicos p pueden calcularse a partir de la distribución resultante de la convolución.

G.1.5 Si la relación funcional entre Y y sus magnitudes de entrada no es lineal, y el desarrollo en serie de Taylor de primer orden no es una aproximación aceptable (véanse 5.1.2 y 5.1.5), la distribución de probabilidad de Y no puede obtenerse mediante convolución de las distribuciones de las magnitudes de entrada. En tales casos, es necesario utilizar otros métodos, analíticos o numéricos.

G.1.6 En la práctica, dado que los parámetros que caracterizan las distribuciones de probabilidad de las magnitudes de entrada son habitualmente estimaciones, que no es realista esperar que el nivel de confianza correspondiente a un intervalo dado pueda conocerse con un elevado grado de exactitud y que la convolución de distribuciones de probabilidad es compleja de realizar, tales convoluciones raramente se realizan a la hora de calcular el intervalo correspondiente a un nivel de confianza específico. En su lugar, se utilizan aproximaciones basadas en el Teorema del Límite Central.

G.2 Teorema del Límite Central

G.2.1 Si $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_NX_N = \sum_{i=1}^{N} c_iX_i$, y todas las X_i vienen caracterizadas por distribuciones normales, la distribución de Y, resultante de la convolución, también es normal. No obstante, aunque las distribuciones de X_i no sean normales, es posible suponer una distribución normal para Y, teniendo en cuenta el Teorema del Límite Central. Este teorema establece que la distribución de Y será *aproximadamente normal*, con esperanza matemática $E(Y) = \sum_{i=1}^{N} c_iE(X_i)$ y varianza $\sigma^2(Y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2\sigma^2(X_i)$, donde $E(X_i)$ es la esperanza matemática de X_i y $\sigma^2(X_i)$ es la varianza de X_i, siempre que las X_i sean independientes y $\sigma^2(Y)$ sea mucho mayor que cualquier otra componente $c_i^2\sigma^2(X_i)$ de una X_i cuya distribución no sea normal.

G.2.2 El Teorema del Límite Central es relevante ya que muestra el importante papel que representan las varianzas de las distribuciones de probabilidad de las magnitudes de entrada, en relación con el representado por los momentos de mayor orden de dichas distribuciones, en la determinación de la forma de la distribución de Y, resultante de la convolución. Implica además que la distribución obtenida tras la convolución converge hacia una distribución normal a medida que aumenta el número de magnitudes de entrada que contribuyen a $\sigma^2(Y)$, que la convergencia será tanto más rápida cuanto más próximos sean entre sí los valores de $c_i^2\sigma^2(X_i)$ (lo que equivale en la práctica a que las estimaciones de entrada x_i contribuyen con incertidumbres comparables a la incertidumbre de la estimación y del mensurando Y), y que cuanto más próximas a la normal sean las distribuciones de X_i, menor número de ellas será necesario para obtener una distribución normal para Y.

EJEMPLO La distribución rectangular (véase 4.3.7 y 4.4.5) es un caso extremo de distribución no normal, pero la convolución de incluso un número tan pequeño como *tres* distribuciones rectangulares de igual amplitud ya es aproximadamente normal. Si la semi-amplitud de cada una de estas tres distribuciones rectangulares es a, de forma que la varianza es $a^2/3$, la varianza de la distribución resultante de la convolución es $\sigma^2 = a^2$. Los intervalos del 95 % y 99 % de la distribución resultante de la convolución vienen definidos respectivamente por $1{,}937\sigma$ y $2{,}379\sigma$, mientras que los correspondientes a una distribución normal de la misma desviación típica σ vienen definidos por $1{,}960\sigma$ y $2{,}576\sigma$ (véase tabla G.1) [10].

NOTA 1 Para todo intervalo con nivel de confianza p superior a aproximadamente un 91,7 %, el valor de k_p para una distribución normal es siempre superior al valor correspondiente de la distribución resultante de la convolución de distribuciones rectangulares, cualquiera que sea el número y amplitud de éstas.

NOTA 2 Del Teorema del Límite Central se deduce que la distribución de probabilidad de la media aritmética $\bar{q}$ de n observaciones q_k de una variable aleatoria q con esperanza matemática μ_q y desviación típica finita σ, se aproxima a una distribución normal de media μ_q y desviación típica $\sigma/\sqrt{n}$, cuando $n \to \infty$, cualquiera que sea la distribución de probabilidad de q.

G.2.3 Una consecuencia práctica del Teorema del Límite Central es que siempre que pueda demostrarse que se cumplen aproximadamente las hipótesis para su validez, en particular que la incertidumbre típica combinada $u_c(y)$ no esté dominada por una componente de incertidumbre típica obtenida por una evaluación Tipo A basada en unas pocas observaciones, o por una componente de incertidumbre típica obtenida por evaluación Tipo B basada en una distribución rectangular, una primera aproximación razonable para el cálculo de una incertidumbre expandida $U_p = k_p u_c(y)$ que proporcione un intervalo con nivel de confianza p, es utilizar para k_p un valor tomado de la distribución normal. La tabla G.1 presenta los valores más comúnmente utilizados para este fin.

G.3 La distribución *t* y los grados de libertad

G.3.1 Para obtener una aproximación mejor que la debida a la simple utilización de un valor de k_p deducido de la distribución normal, como en G.2.3, debe tenerse presente que el cálculo de un intervalo de nivel de confianza específico necesita, no la distribución de la variable $[Y - E(Y)]/\sigma(Y)$, sino la distribución de la variable $(y - Y)/u_c(y)$. Esto es debido a que, en la práctica, de lo único que se dispone es de y, estimación de Y obtenida a partir de $y = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i$, donde x_i es la estimación de X_i, y la varianza combinada asociada a y, $u_c^2(y)$, evaluada a partir de $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i)$, donde $u(x_i)$ es la incertidumbre típica (desviación típica estimada) de la estimación x_i.

NOTA Estrictamente hablando, en la expresión $(y - Y) / u_c(y)$ debería utilizarse $E(Y)$ en lugar de Y. Por simplificación, tal distinción sólo se ha hecho en algunos lugares de la *Guía*. En general, se ha utilizado el mismo símbolo para la magnitud física, la variable aleatoria que representa a esta magnitud y la esperanza matemática de dicha variable (véanse notas de 4.1.1).

G.3.2 Si z es una variable aleatoria normalmente distribuida, con esperanza matemática μ_z y desviación típica σ, y $\bar{z}$ es la media aritmética de n observaciones independientes z_k de z, siendo $s(\bar{z})$ la desviación típica experimental de $\bar{z}$ [véanse ecuaciones (3) y (5) de 4.2], entonces la distribución de la variable $t = (\bar{z} - \mu_z) / s(\bar{z})$ es la **distribución *t*** o **distribución de Student** (C.3.8) con $\nu = n - 1$ grados de libertad.

En consecuencia, si el mensurando Y es simplemente una única magnitud X normalmente distribuida, $Y = X$; y si X se estima mediante la media aritmética $\bar{X}$ de n observaciones repetidas independientes X_k de X, con una desviación típica experimental de la media $s(\bar{X})$, entonces la mejor estimación de Y es $y = \bar{X}$ y la desviación típica experimental de esta estimación es $u_c(y) = s(\bar{X})$. Entonces $t = (\bar{z} - \mu_z)/s(\bar{z}) = (\bar{X} - X)/s(\bar{X}) = (y - Y)/u_c(y)$ sigue una distribución t, con

$$\Pr[-t_p(\nu) \le t \le t_p(\nu)] = p \qquad \text{(G.1a)}$$

o

$$\Pr[-t_p(\nu) \le (y-Y) / u_c(y) \le t_p(\nu)] = p \qquad \text{(G.1b)}$$

y también puede escribirse en la forma

$$\Pr[y - t_p(\nu)\, u_c(y) \le Y \le y + t_p(\nu)\, u_c(y)] = p \qquad \text{(G.1c)}$$

En estas expresiones, Pr[ ] significa “probabilidad de” y el factor t, $t_p(\nu)$, es el valor de t para un valor dado del parámetro ν, los grados de libertad (véase G.3.3), de forma que la fracción p de la distribución t esté comprendida en el intervalo $-t_p(\nu)$ a $+t_p(\nu)$. En consecuencia, la incertidumbre expandida

$$U_p = k_p\, u_c(y) = t_p(\nu)\, u_c(y) \qquad \text{(G.1d)}$$

define un intervalo desde $y - U_p$ a $y + U_p$, escrito por comodidad $Y = y \pm U_p$, que es de esperar contenga una fracción p de la distribución de valores que podrían ser razonablemente atribuídos a Y, siendo p la probabilidad o nivel de confianza del intervalo.

G.3.3 El número de grados de libertad ν es igual a $n - 1$, para una magnitud única estimada por la media aritmética de n observaciones independientes, como en G.3.2. Si se utilizan las n observaciones independientes para determinar a la vez la pendiente y la ordenada en el origen de una recta, por el método de los mínimos cuadrados, el número de grados de libertad de sus incertidumbres típicas respectivas es $\nu = n - 2$. En el ajuste por mínimos cuadrados de m parámetros, a partir de n datos, el número de grados de libertad de la incertidumbre típica de cada parámetro es $\nu = n - m$ (véase referencia [15] para un análisis más completo de los grados de libertad).

G.3.4 Al final de este anexo, en la tabla G.2, se presenta una selección de valores de $t_p(\nu)$, para diferentes valores de ν y de p. A medida que $\nu \to \infty$, la distribución t tiende hacia una distribución normal, y $t_p(\nu) \approx (1+2/\nu)^{1/2}\, k_p$, donde k_p es el factor de cobertura necesario para obtener un intervalo con nivel de confianza p para una variable distribuida normalmente. Por ello, en la tabla G.2, el valor de $t_p(\infty)$ para un valor dado p, es igual al valor de k_p para el mismo valor de p de la tabla G.1.

NOTA La distribución t viene tabulada con frecuencia en percentiles; es decir, se dan los valores del percentil $t_{1-\alpha}$, siendo $1-\alpha$ la probabilidad acumulada. En la relación

$$1-\alpha = \int_{-\infty}^{t_{1-\alpha}} f(t,\nu)\,\mathrm{d}t$$

que define el percentil, f es la función de densidad de probabilidad de t. De esta forma, $t_p(\nu)$ y $t_{1-\alpha}(\nu)$ están relacionados por $p = 1-2\alpha$. Así, por ejemplo, el valor del percentil $t_{0,975}$ para el que $1-\alpha = 0{,}975$ y $\alpha = 0{,}025$, es el mismo que el de $t_p(\nu)$ para $p = 0{,}95$.

G.4 Grados efectivos de libertad

G.4.1 En general, la distribución t no describe la distribución de la variable $(y - Y) / u_c(y)$ si $u_c^2(y)$ es la suma de dos o más componentes de varianzas estimadas $u_i^2(y) = c_i^2\, u^2(x_i)$ (véase 5.1.3), ni siquiera si cada x_i es la estimación de una magnitud de entrada X_i distribuida normalmente. No obstante, es posible aproximarse a la distribución de esta variable por medio de una distribución t con un número *efectivo* de grados de libertad ν_{eff} obtenido mediante la fórmula de Welch-Satterthwaite [16, 17, 18]

$$\frac{u_{\text{c}}^4(y)}{\nu_{\text{eff}}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i} \tag{G.2a}$$

o

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \tag{G.2b}$$

con

$$\nu_{\text{eff}} \le \sum_{i=1}^{N} \nu_i \tag{G.2c}$$

donde $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y)$ (véase 5.1.3). La incertidumbre expandida $U_{\text{p}} = k_p\, u_c(y) = t_{\text{p}}(\nu_{\text{eff}})\, u_c(y)$ proporciona pues un intervalo $Y = y \pm U_p$ con un nivel de confianza aproximado p.

NOTA 1 Si el valor de ν_{eff} obtenido a partir de la ecuación (G.2b) no es un número entero, lo que será el caso habitual en la práctica, la obtención del valor correspondiente de t_p se realizará, a partir de la tabla G.2, por interpolación o truncamiento de ν_{eff} al número entero inferior más próximo.

NOTA 2 Si una estimación de entrada x_i se obtiene, a su vez, a partir de dos o más estimaciones, el valor de ν_i a utilizar junto con $u_i^4(y) = [c_i^2 u^2(x_i)]^2$ en el denominador de la ecuación (G.2b) será el número efectivo de grados de libertad calculado mediante una expresión equivalente a la ecuación (G.2b).

NOTA 3 Dependiendo de las necesidades de los usuarios potenciales de un resultado de medida, puede ser útil, además de ν_{eff}, dar también los valores de ν_{effA} y ν_{effB} calculados a partir de la ecuación (G.2b), al tratar separadamente las incertidumbres típicas obtenidas en las evaluaciones Tipo A y Tipo B. Si expresamos como $u^2_{\text{cA}}(y)$ y $u^2_{\text{cB}}(y)$ las contribuciones a $u_c^2(y)$ de las incertidumbres típicas Tipo A y Tipo B, las diferentes magnitudes estarán ligadas mediante:

$$u_{\text{c}}^2(y) = u_{\text{cA}}^2(y) + u_{\text{cB}}^2(y)$$

$$\frac{u_c^4(y)}{\nu_{\text{eff}}} = \frac{u_{\text{cA}}^4(y)}{\nu_{\text{effA}}} + \frac{u_{\text{cB}}^4(y)}{\nu_{\text{effB}}}$$

EJEMPLO Supongamos que $Y = f(X_1, X_2, X_3) = bX_1X_2X_3$, y que las estimaciones x_1, x_2, x_3 de las magnitudes de entrada X_1, X_2, X_3 distribuidas normalmente, son las medias aritméticas de $n_1 = 10$, $n_2 = 5$, y $n_3 = 15$ observaciones repetidas e independientes, con incertidumbres típicas relativas $u(x_1)/ x_1 = 0,25$ %, $u(x_2) / x_2 = 0,57$ %, y $u(x_3)/x_3 = 0,82$ %. En este caso, $c_i = \partial f / \partial X_i = Y / X_i$ (calculados para x_1, x_2, x_3, véase 5.1.3, nota 1), $[u_c(y)/y]^2 = \sum_{i=1}^{3}[u_c(x_i)/x_i]^2 = (1{,}03\ \%)^2$ (véase nota 2 de 5.1.6), y la ecuación (G.2b) se transforma en:

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{[u_c(y)/y]^4}{\sum_{i=1}^{3}\frac{[u(x_i)/x_i]^4}{\nu_i}}$$

Entonces,

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{1{,}03^4}{\frac{0{,}25^4}{10-1} + \frac{0{,}57^4}{5-1} + \frac{0{,}82^4}{15-1}} = 19{,}0$$

El valor de t_p para $p = 95$ % y $\nu = 19$ es $t_{95}(19) = 2{,}09$, según la tabla G.2; por tanto, la incertidumbre expandida relativa para este nivel de confianza es $U_{95} = 2{,}09 \times (1{,}03\ \%) = 2{,}2$ %. Entonces, puede decirse que $Y = y \pm U_{95} = y(1 \pm 0{,}022)$ (y determinado a partir de $y = bx_1x_2x_3$), o que $0{,}978\,y \le Y \le 1{,}022\,y$, y que el nivel de confianza del intervalo es aproximadamente del 95 %.

G.4.2 En la práctica, $u_c(y)$ depende de las incertidumbres típicas $u(x_i)$ de las estimaciones de entrada de las magnitudes, unas distribuidas normalmente y otras no, obteniéndose las $u(x_i)$ a partir tanto de distribuciones de frecuencia como de probabilidad *a priori* (es decir, de evaluaciones Tipo A y Tipo B). Lo mismo puede decirse de la estimación y y de las estimaciones de entrada x_i de las que depende y. Sin embargo, la distribución de probabilidad de la función $t = (y - Y) / u_c(y)$ puede aproximarse mediante la distribución t, si ésta se desarrolla en serie de Taylor en torno a su esperanza matemática. Esto es lo que se consigue esencialmente, en la aproximación de menor orden, mediante la fórmula de Welch-Satterthwaite, ecuación (G.2a) o ecuación (G.2b).

La cuestión consiste en saber cuál es el número de grados de libertad a asignar a una incertidumbre típica obtenida mediante evaluación Tipo B, cuando ν_{eff} se calcula mediante la ecuación (G.2b). Puesto que la definición de número de grados de libertad admite que ν, tal como aparece en la distribución t, es una medida de la incertidumbre de la varianza $s^2(\bar{z})$, puede utilizarse la ecuación (E.7) de E.4.3 para definir el número de grados de libertad ν_i,

$$\nu_i \approx \frac{1}{2}\frac{u^2(x_i)}{\sigma^2[u(x_i)]} \approx \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}\right]^{-2} \tag{G.3}$$

La magnitud entre los corchetes grandes es la incertidumbre relativa de $u(x_i)$. Para una evaluación Tipo B de la incertidumbre típica, se trata de una magnitud subjetiva cuyo valor se obtiene mediante juicio científico basado en el conjunto de informaciones disponibles.

EJEMPLO Supóngase que el conocimiento que se tiene acerca de la forma en que se evaluaron la estimación de entrada x_i y su incertidumbre típica $u(x_i)$ permite concluir que el valor de $u(x_i)$ posee una fiabilidad en torno a un 25 %. Esto puede significar que la incertidumbre relativa es $\Delta u(x_i) / u(x_i) = 0{,}25$ y, en consecuencia, a partir de la ecuación (G.3), que $\nu_i = (0{,}25)^{-2} / 2 = 8$. Si, al contrario, se supusiera que la fiabilidad del valor de $u(x_i)$ es de un 50%, entonces $\nu_i = 2$. (Véase también la tabla E.1 del anexo E).

G.4.3 En el análisis en 4.3 y 4.4 de la evaluación Tipo B de la incertidumbre típica a partir de una distribución de probabilidad *a priori*, se asumía implícitamente que el valor de $u(x_i)$ resultante de dicha evaluación era conocido con exactitud. Por ejemplo, cuando $u(x_i)$ se obtiene a partir de una distribución rectangular de semi-amplitud $a = (a_+ - a_-)/2$, como en 4.3.7 y 4.4.5, $u(x_i) = a / \sqrt{3}$ se considera como constante, sin incertidumbre, puesto que así son también considerados los límites a_+ y a_- y, en consecuencia a (pero véase la nota 2 de 4.3.9). Esto supone, según la ecuación (G.3) que $\nu_i \to \infty$, o que $1/\nu_i \to 0$ que es lo mismo, lo que no entraña dificultad alguna para evaluar la ecuación (G.2b). Además, el suponer que $\nu_i \to \infty$ no está tan alejado de la realidad, ya que es una práctica frecuente elegir a_- y a_+ de forma que la probabilidad de que la magnitud en cuestión esté fuera del intervalo comprendido entre a_- y a_+ sea extremadamente pequeña.

G.5 Otras consideraciones

G.5.1 Una expresión procedente de la bibliografía sobre incertidumbres de medida, utilizada frecuentemente para obtener una que proporcione un intervalo con un 95 % de confianza, es la siguiente:

$$U'_{95} = \left[t_{95}^2(\nu'_{\text{eff}})s^2 + 3u^2\right]^{1/2} \tag{G.4}$$

Aquí, $t_{95}^2(\nu'_{\text{eff}})$ está tomado de la distribución t para ν'_{eff} grados de libertad y p = 95 %; ν'_{eff} es el número efectivo de grados de libertad calculado a partir de la fórmula de Welch-Satterthwaite [ecuación (G.2b)] tomando en cuenta *únicamente* las componentes de incertidumbre típica s_i evaluadas estadísticamente a partir de observaciones repetidas, en la medición *en curso*; $s^2 = \sum c_i^2 s_i^2$; $c_i \equiv \partial f / \partial x_i$; y $u^2 = \sum u_j^2(y) = \sum c_j^2(a_j^2/3)$ son de aplicación para *todas las demás* componentes de incertidumbre, con $+a_j$ y $-a_j$ como límites superior e inferior, exactamente conocidos, de X_j respecto a su mejor estimación x_j (es decir, $x_j - a_j \leq X_j \leq x_j + a_j$).

NOTA Una componente basada en observaciones repetidas realizadas *fuera* de la medición en curso se trataría de la misma forma que cualquiera de las otras componentes incluidas en u^2. De aquí que, para poder hacer una comparación significativa entre las ecuaciones (G.4) y (G.5) del apartado siguiente, se suponga que tales componentes, si están presentes, son despreciables.

G.5.2 Si se evalúa la incertidumbre expandida que proporciona un intervalo con un nivel de confianza del 95 % mediante los métodos recomendados en G.3 y G.4, la expresión que resulta en lugar de la ecuación (G.4) es

$$U_{95} = t_{95}(\nu_{\text{eff}})\left(s^2 + u^2\right)^{1/2} \tag{G.5}$$

donde ν_{eff} se calcula a partir de la ecuación (G.2b), y donde el cálculo incluye *todas* las componentes de incertidumbre.

En la mayor parte de los casos, el valor de U_{95} obtenido mediante la ecuación (G.5) será mayor que el de U'_{95} obtenido por la ecuación (G.4), siempre que se suponga que, en la evaluación de la ecuación (G.5), todas las varianzas Tipo B se obtienen a partir de distribuciones rectangulares *a priori*, cuyas semi-amplitudes coinciden con los límites a_j utilizados para calcular u^2 en la ecuación (G.4). Esto se comprende tras constatar que, aunque $t_{95}(\nu'_{\text{eff}})$ será la mayor parte de las veces algo mayor que $t_{95}(\nu_{\text{eff}})$, ambos factores son próximos al valor 2, y que en la ecuación (G.5), u^2 va multiplicada por $t_{95}^2(\nu_{\text{eff}}) \approx 4$, mientras que en la ecuación (G.4), va multiplicada por 3. Aunque las dos expresiones dan valores iguales para U'_{95} y U_{95} cuando $u^2 << s^2$, sin embargo, U'_{95} llega a ser hasta un 13 % inferior a U_{95}, cuando $u^2 >> s^2$. Así, la ecuación (G.4) da en general una incertidumbre que proporciona un intervalo con un nivel de confianza *inferior* al del intervalo proporcionado por la incertidumbre expandida calculada a partir de la ecuación (G.5).

NOTA 1 En los límites $u^2/s^2 \to \infty$ y $\nu_{\text{eff}} \to \infty$, $U'_{95} \to 1{,}732u$ mientras que $U_{95} \to 1{,}960u$. En este caso, U'_{95} proporciona un intervalo con un nivel de confianza del 91,7 % solamente, mientras que U_{95} proporciona un intervalo con un 95 %. En la práctica, está situación se da cuando las componentes obtenidas a partir de estimaciones de límites superior e inferior, son dominantes, importantes en número y dan valores comparables de $u_j^2(y) = c_j^2 a_j^2/3$.

NOTA 2 Para una distribución normal, el factor de cobertura $k = \sqrt{3} \approx 1{,}732$ proporciona un intervalo con un nivel de confianza p = 91,673 %. Este valor de p es consistente, en el sentido de que, comparado con cualquier otro valor, es independiente, en muy alto grado, de pequeñas desviaciones respecto a la normalidad de las magnitudes de entrada.

G.5.3 Ocasionalmente, una magnitud de entrada X_i puede distribuirse de forma asimétrica, las desviaciones respecto a su esperanza matemática son más probables en un sentido que en el otro (véase 4.3.8). Aunque esto no supone diferencia alguna respecto a la evaluación de la incertidumbre típica $u(x_i)$ de la estimación x_i de X_i, y por tanto, de $u_c(y)$, sin embargo puede afectar al cálculo de U.

Habitualmente, es conveniente proporcionar un intervalo simétrico $Y = y \pm U$, salvo que exista un diferencial de coste entre las variaciones de un signo respecto a las del otro. Si la asimetría de X_i entraña únicamente una pequeña asimetría de la distribución caracterizada por el resultado de medida y y por su incertidumbre típica combinada $u_c(y)$, la pérdida de probabilidad en uno de los lados, por dar un intervalo simétrico, queda compensada por la ganancia de probabilidad en el otro lado. La alternativa es proporcionar un intervalo simétrico en probabilidad (y, por tanto, asimétrico en U), de forma que la probabilidad de que Y esté situado por debajo del límite inferior $y - U_-$ sea igual a la probabilidad de que Y esté situado por encima del límite superior $y + U_+$. Pero para dar tales límites, es necesario contar con más información que simplemente las estimaciones y y $u_c(y)$ [y, consecuentemente, más información que simplemente las estimaciones x_i y $u(x_i)$ de cada magnitud de entrada X_i].

G.5.4 La evaluación de la incertidumbre expandida U_p hecha aquí en función de $u_c(y)$, ν_{eff} y el factor $t_p(\nu_{\text{eff}})$ de la distribución t, es solamente una aproximación, y tiene sus limitaciones. La expresión $(y - Y) / u_c(y)$ sigue la distribución t, únicamente si la distribución de Y es normal, la estimación y y su incertidumbre típica combinada $u_c(y)$ son independientes, y la distribución de $u_c^2(y)$ es una distribución χ^2. La introducción de ν_{eff}, ecuación (G.2b), tiene que ver únicamente con el último problema, proporcionando una distribución aproximadamente χ^2 para $u_c^2(y)$; la otra parte del problema, derivada de la falta de normalidad de la distribución de Y, requiere la consideración de momentos de mayor orden, además de la varianza.

G.6 Resumen y conclusiones

G.6.1 El factor de cobertura k_p que proporciona un intervalo con un nivel de confianza p próximo a un nivel especificado, no puede hallarse más que si se dispone de un conocimiento amplio acerca de la distribución de probabilidad de cada magnitud de entrada, y de cómo se combinan dichas distribuciones para obtener la distribución de la magnitud de salida. Las estimaciones de entrada x_i y sus incertidumbres típicas $u(x_i)$ son, por sí solas, insuficientes para alcanzar tal objetivo.

G.6.2 Dado que los voluminosos cálculos necesarios para combinar las distribuciones de probabilidad raramente quedan justificados por la extensión y fiabilidad de la información disponible, es aceptable una aproximación a la distribución de la magnitud de salida. Según el Teorema del Límite Central, suele ser suficiente con asumir que la distribución de probabilidad de $(y - Y) / u_c(y)$ es una función t, y tomar $k_p = t_p(\nu_{\text{eff}})$, con el factor t basado en un número efectivo de grados de libertad ν_{eff} de $u_c(y)$ obtenido a partir de la fórmula de Welch-Satterthwaite, ecuación (G.2b).

G.6.3 La obtención de ν_{eff} a partir de la ecuación (G.2b) implica conocer el número de grados de libertad ν_i de cada incertidumbre típica. Para una componente obtenida mediante evaluación Tipo A, ν_i depende del número de observaciones repetidas e independientes sobre las que se basa la estimación de la entrada correspondiente, así como del número de magnitudes independientes determinadas a partir de dichas observaciones (véase G.3.3). Para una componente obtenida mediante evaluación Tipo B, ν_i depende de la fiabilidad que pueda suponérsele al valor de dicha componente [véase G.4.2 y ecuación (G.3)].

G.6.4 Lo que sigue es un resumen del método aconsejado para calcular una incertidumbre expandida $U_p = k_p u_c(y)$ que proporcione un intervalo $Y = y \pm U_p$ con un nivel de confianza aproximado p:

1) Determinar y y $u_c(y)$ tal como se indica en los capítulos 4 y 5.

2) Calcular ν_{eff} a partir de la fórmula de Welch-Satterthwaite, ecuación (G.2b) (reproducida de nuevo a continuación para facilidad de consulta):

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \qquad \text{(G.2b)}$$

Si $u(x_i)$ se obtiene mediante evaluación Tipo A, determinar ν_i tal como se indica en G.3.3. Si $u(x_i)$ se obtiene mediante evaluación Tipo B, y puede considerarse como conocida con exactitud, lo que ocurre frecuentemente en la práctica, $\nu_i \to \infty$; si no es así, estimar ν_i mediante la ecuación (G.3).

3) Obtener el factor $t_p(\nu_{\text{eff}})$ para el nivel de confianza p deseado, a partir de la tabla G.2. Si ν_{eff} no es un número entero, interpolar o truncar ν_{eff} al entero inferior más próximo.

4) Tomar $k_p = t_p(\nu_{\text{eff}})$ y calcular $U_p = k_p\, u_c(y)$.

G.6.5 En determinados casos, no demasiado frecuentes en la práctica, puede que no se satisfagan exactamente las condiciones exigidas por el Teorema del Límite Central, y la aproximación de G.6.4 puede conducir a un resultado inaceptable. Por ejemplo, si $u_c(y)$ está dominada por una componente de incertidumbre evaluada a partir de una distribución rectangular cuyos límites se suponen exactamente conocidos, es posible $\left[\text{si } t_p(\nu_{\text{eff}}) > \sqrt{3}\,\right]$ que $y + U_p$ e $y - U_p$, límites superior e inferior del intervalo definido por U_p, puedan situarse fuera de los límites de la distribución de probabilidad de la magnitud de salida Y. Tales casos deben tratarse de forma individualizada, aunque frecuentemente caben aproximaciones analíticas (por ejemplo, mediante convolución de una distribución normal con una distribución rectangular [10]).

G.6.6 En numerosas mediciones prácticas, en campos variados, se dan las siguientes condiciones:

- la estimación y del mensurando Y se obtiene a partir de estimaciones x_i de un número significativo de magnitudes de entrada X_i que pueden describirse mediante distribuciones de probabilidad razonables, tales como distribuciones normales o rectangulares;
- las incertidumbres típicas $u(x_i)$ de tales estimaciones, obtenibles mediante evaluaciones Tipo A o Tipo B, contribuyen de forma comparable a la incertidumbre típica combinada $u_c(y)$ del resultado de medida y;
- la aproximación lineal supuesta por la ley de propagación de la incertidumbre resulta adecuada (véanse 5.1.2 y E.3.1);
- la incertidumbre de $u_c(y)$ es razonablemente pequeña puesto que su número de grados efectivos de libertad ν_{eff} es significativamente elevado, normalmente superior a 10.

En tales condiciones, puede suponerse que la distribución de probabilidad caracterizada por el resultado de medida y su incertidumbre típica combinada, es normal, en razón del Teorema del Límite Central y $u_c(y)$ puede considerarse como una estimación razonablemente fiable de la desviación típica de dicha distribución normal, en razón del valor significativamente alto de ν_{eff}. Entonces, con base en la presentación hecha en este anexo, incluyendo el énfasis puesto en la naturaleza aproximada del proceso de evaluación de la incertidumbre y en lo poco práctico que resulta tratar de distinguir entre intervalos cuyos niveles de confianza difirieran entre sí un uno o un dos por ciento, puede hacerse lo siguiente:

- tomar $k = 2$ y suponer que $U = 2u_c(y)$ define un intervalo con un nivel de confianza en torno a un 95 %;

o, para aplicaciones más críticas,

- tomar $k = 3$ y suponer que $U = 3u_c(y)$ define un intervalo con un nivel de confianza en torno a un 99 %.

Aunque esta aproximación debería ser adecuada para numerosas aplicaciones prácticas, sin embargo, su aplicación a una medición particular dependerá de lo que se aproxime $k = 2$ a $t_{95}(\nu_{\text{eff}})$, o $k = 3$ a $t_{99}(\nu_{\text{eff}})$; es decir, de lo cercano que esté el nivel de confianza del intervalo definido por $U = 2u_c(y)$ o $U = 3u_c(y)$ a un 95 % o a un 99 %, respectivamente. Aunque para $\nu_{\text{eff}} = 11$, $k = 2$ y $k = 3$ solamente subestiman $t_{95}(11)$ y $t_{99}(11)$ en un 10 % y un 4 %, respectivamente, (véase tabla G.2), esto puede no ser aceptable en determinados casos. Además, para todos los valores de ν_{eff} ligeramente superiores a 13, $k = 3$ conduce a un intervalo con nivel de confianza superior al 99 %. (Véase tabla G.2, que muestra también que para $\nu_{\text{eff}} \to \infty$ los niveles de confianza de los intervalos proporcionados por $k = 2$ y $k = 3$ son, respectivamente, del 95,45 % y del 99,73 %). Así, en la práctica, son los valores de ν_{eff} y de la incertidumbre expandida requerida, los que determinarán si puede utilizarse o no dicha aproximación.

Tabla G.2: Valor de $t_p(\nu)$ de la distribución t, para ν grados de libertad, que define un intervalo de $-t_p(\nu)$ a $+t_p(\nu)$, que comprende la fracción p de la distribución

Grados de libertad	Fracción p (%)					
ν	**68,27** [a)]	**90**	**95**	**95,45** [a)]	**99**	**99,73** [a)]
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
11	1,05	1,80	2,20	2,25	3,11	3,85
12	1,04	1,78	2,18	2,23	3,05	3,76
13	1,04	1,77	2,16	2,21	3,01	3,69
14	1,04	1,76	2,14	2,20	2,98	3,64
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59
16	1,03	1,75	2,12	2,17	2,92	3,54
17	1,03	1,74	2,11	2,16	2,90	3,51
18	1,03	1,73	2,10	2,15	2,88	3,48
19	1,03	1,73	2,09	2,14	2,86	3,45
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
30	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27
35	1,01	1,70	2,03	2,07	2,72	3,23
40	1,01	1,68	2,02	2,06	2,70	3,20
45	1,01	1,68	2,01	2,06	2,69	3,18
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,005	1,660	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1,000	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000

a) Para una magnitud z descrita por una distribución normal de esperanza matemática μ_z y desviación típica σ, el intervalo $\mu_z \pm k\sigma$ comprende respectivamente las fracciones p = 68,27 %; 95,45 % y 99,73 % de la distribución, para los valores k = 1, 2 y 3.

Anexo H

Ejemplos

Este anexo presenta seis ejemplos, H.1 a H.6, tratados de forma muy detallada, a fin de ilustrar los principios fundamentales presentados en esta *Guía* para evaluar y expresar la incertidumbre de medida. Los ejemplos aportados en el texto principal del documento y en algunos otros anexos, pretenden conseguir que los usuarios de esta *Guía* puedan poner en práctica estos principios en su propio trabajo.

Como los ejemplos obedecen a un propósito ilustrativo, ha sido necesario simplificarlos. Además, dado que los ejemplos y los datos numéricos correspondientes han sido escogidos esencialmente para demostrar los principios de esta *Guía*, no deben interpretarse necesariamente como mediciones reales. Mientras que los datos se utilizan tal como se dan, para limitar los errores de redondeo los cálculos intermedios se han realizado con un número de cifras significativas mayor que el habitualmente mostrado. En consecuencia, el resultado final de un cálculo en el que intervienen varias magnitudes, puede diferir ligeramente del resultado obtenido a partir de los valores numéricos dados en el texto para dichas magnitudes.

En capítulos anteriores de esta *Guía* se ha indicado que la clasificación en Tipo A y Tipo B de los métodos utilizados para evaluar las componentes de la incertidumbre, lo es únicamente por conveniencia. Dicha clasificación no es necesaria para determinar la incertidumbre típica combinada o la expandida de un resultado de medida, puesto que todas las componentes de la incertidumbre son tratadas de la misma manera, independientemente de cómo sean evaluadas (véanse 3.3.4, 5.1.2 y E.3.7). Así, en los ejemplos, el método utilizado para evaluar una componente particular de la incertidumbre no se identifica específicamente. No obstante, la presentación muestra claramente si una componente se ha obtenido mediante evaluación Tipo A o Tipo B.

H.1 Calibración de bloques patrón longitudinales

Este ejemplo demuestra que, incluso en una medición aparentemente sencilla, puede haber aspectos sutiles relacionados con la evaluación de la incertidumbre.

H.1.1 Definición del problema de medición

La longitud de un bloque patrón longitudinal, de valor nominal 50 mm, se determina por comparación con otro bloque patrón conocido, de la misma longitud nominal. En la comparación de los dos bloques se obtiene directamente la diferencia d entre sus longitudes:

$$d = l(1+\alpha\theta) - l_S(1+\alpha_S\theta_S) \tag{H.1}$$

donde

l es el mensurando; es decir, la longitud a 20 °C del bloque a calibrar;

l_S es la longitud del bloque patrón a 20 °C, dada en su certificado de calibración;

α y α_S son, respectivamente, los coeficientes de dilatación térmica lineal del bloque a calibrar y del bloque patrón;

θ y θ_S son, respectivamente, las *desviaciones* respecto a la temperatura de referencia de 20 °C, del bloque a calibrar y del bloque patrón.

H.1.2 Modelo matemático

Según la ecuación (H.1), el mensurando viene dado por

$$l = \frac{l_S(1+\alpha_S\theta_S)+d}{(1+\alpha\theta)} = l_S + d + l_S(\alpha_S\theta_S - \alpha\theta) + .. \tag{H.2}$$

Si la diferencia de temperatura entre el bloque a calibrar y el bloque patrón es $\delta\theta = \theta - \theta_S$, y la diferencia entre sus coeficientes de dilatación térmica lineal es $\delta\alpha = \alpha - \alpha_S$, la ecuación (H.2) se transforma en

$$l = f(l_S, d, \alpha_S, \theta, \delta\alpha, \delta\theta) = l_S + d - l_S\left[\delta\alpha \cdot \theta + \alpha_S \cdot \delta\theta\right] \tag{H.3}$$

Las diferencias $\delta\theta$ y $\delta\alpha$ se suponen nulas, pero no así sus incertidumbres. Además, $\delta\alpha$, α_S, $\delta\theta$ y θ se suponen no correlacionadas. (Si el mensurando se expresara en función de las variables θ, θ_S, α y α_S, sería necesario incluir la correlación entre θ y θ_S, y entre α y α_S).

De la ecuación (H.3) se deduce pues que la estimación del valor del mensurando l puede obtenerse a partir de la sencilla expresión $l_S + \overline{d}$, donde l_S es la longitud del patrón a 20 °C, tal como figura en su certificado de calibración, y d se estima por medio de $\overline{d}$, media aritmética de n = 5 observaciones repetidas e independientes. La incertidumbre típica combinada $u_c(l)$ se obtiene aplicando la ecuación (10) de 5.1.2 a la ecuación (H.3), tal como se analiza más adelante.

NOTA En este ejemplo y en los siguientes, para simplificar la notación, se utiliza el mismo símbolo tanto para la magnitud como para su estimación.

H.1.3 Contribución de varianzas

La tabla (H.1) resume las características principales de este ejemplo, analizadas en éste y en los siguientes subapartados.

Puesto que se supone que $\delta\alpha$ = 0 y $\delta\theta$ = 0, la aplicación de la ecuación (10) de 5.1.2 a la ecuación (H.3) da como resultado

$$u_c^2(l) = c_S^2 \cdot u^2(l_S) + c_d^2 \cdot u^2(d) + c_{\alpha_S}^2 \cdot u^2(\alpha_S) + c_\theta^2 \cdot u^2(\theta) + c_{\delta\alpha}^2 \cdot u^2(\delta\alpha) + c_{\delta\theta}^2 \cdot u^2(\delta\theta) \tag{H.4}$$

con

$$c_S = \partial f / \partial l_S = 1 - (\delta\alpha \cdot \theta + \alpha_S \cdot \delta\theta) = 1$$
$$c_d = \partial f / \partial d = 1$$
$$c_{\alpha_S} = \partial f / \partial \alpha_S = -l_S\delta\theta = 0$$
$$c_\theta = \partial f / \partial \theta = -l_S\delta\alpha = 0$$
$$c_{\delta\alpha} = \partial f / \partial \delta\alpha = -l_S\theta$$
$$c_{\delta\theta} = \partial f / \partial \delta\theta = -l_S\alpha_S$$

y, en consecuencia,

$$u_c^2(l) = u^2(l_S) + u^2(d) + l_S^2\theta^2u^2(\delta\alpha) + l_S^2\alpha_S^2u^2(\delta\theta) \tag{H.5}$$

H.1.3.1 Incertidumbre de calibración del patrón, $u(l_S)$

El certificado de calibración da como incertidumbre expandida del patrón U = 0,075 µm, precisando que ha sido obtenida utilizando un factor de cobertura k = 3. La incertidumbre típica es entonces

$$u(l_S) = (0{,}075\ \mu\text{m}) / 3 = 25\ \text{nm}$$

H.1.3.2 Incertidumbre de la diferencia de longitudes medida, $u(d)$

La desviación típica experimental de una medida que caracterice la comparación de l y l_S está basada en la variabilidad de 25 observaciones repetidas e independientes de diferencias de longitud entre dos bloques patrón longitudinales, habiéndose obtenido un valor de 13 nm. En la comparación del presente ejemplo, se han realizado únicamente cinco repeticiones. Por tanto, la incertidumbre típica asociada a la media aritmética de estas lecturas será (véase 4.2.4)

$$u(\overline{d}) = s(\overline{d}) = (13\ \text{nm})/\sqrt{5} = 5{,}8\ \text{nm}$$

El certificado de calibración del instrumento utilizado para comparar l con l_S indica que su incertidumbre "debida a errores aleatorios" es ± 0,01 μm, con un nivel de confianza del 95 %, sobre la base de 6 medidas repetidas; la incertidumbre típica será pues, utilizando el factor t para $\nu = 6 - 1 = 5$ grados de libertad, $t_{95}(5) = 2{,}57$ (véase anexo G, tabla 2)

$$u(d_1) = (0{,}01\ \mu\text{m}) / 2{,}57 = 3{,}9\ \text{nm}$$

En el certificado se dice también que la incertidumbre del comparador "debida a errores sistemáticos" es 0,02 μm, para un "nivel tres sigma". La incertidumbre típica por esta causa es pues igual a:

$$u(d_2) = (0{,}02\ \mu\text{m}) / 3 = 6{,}7\ \text{nm}$$

La contribución total se obtiene mediante la suma de las varianzas estimadas:

$$u^2(d) = u^2(\overline{d}) + u^2(d_1) + u^2(d_2) = 93\ \text{nm}^2$$

o bien

$$u(d) = 9{,}7\ \text{nm}$$

H.1.3.3 Incertidumbre del coeficiente de dilatación térmica lineal, $u(\alpha_S)$

El coeficiente de dilatación térmica del bloque patrón viene dado como $\alpha_S = 11{,}5 \times 10^{-6}$ °C^{-1} con una incertidumbre representada por una distribución rectangular de límites ± 2 × 10^{-6} °C^{-1}. La incertidumbre típica es entonces [véase ecuación (7) de 4.3.7]

$$u(\alpha_S) = (2 \times 10^{-6}\ ^\circ\text{C}^{-1})/\sqrt{3} = 1{,}2 \times 10^{-6}\ ^\circ\text{C}^{-1}$$

Como $c_{\alpha_S} = \partial f / \partial \alpha_S = -l_S \delta\theta = 0$, según se indica en H.1.3, esta incertidumbre no contribuye a la incertidumbre de l, en el primer orden. No obstante, existe una contribución de segundo orden, que se evalúa en H.1.7.

Tabla H.1: Resumen de componentes de la incertidumbre típica

Componente de la incertidumbre típica $u(x_i)$	**Fuente de incertidumbre**	**Valor de la incertidumbre típica** $u(x_i)$	$c_i \equiv \partial f / \partial x_i$	$u_i(l) \equiv \lvert c_i \rvert u(x_i)$ (nm)	**Grados de libertad**
$u(l_S)$	Calibración del bloque patrón	25 nm	1	25	18
$u(d)$	Diferencia medida entre bloques	9,7 nm	1	9,7	25,6
$u(\overline{d})$	observaciones repetidas	5,8 nm			24
$u(d_1)$	efectos aleatorios del comparador	3,9 nm			5
$u(d_2)$	efectos sistemáticos del comparador	6,7 nm			8
$u(\alpha_S)$	Coeficiente de dilatación térmica del bloque patrón	1,2 x 10^{-6} °C^{-1}	0	0	
$u(\theta)$	Temperatura del banco	0,41 °C	0	0	
$u(\overline{\theta})$	temperatura media del banco	0,2 °C			
$u(\Delta)$	variación cíclica de la temperatura en la sala de medida	0,35 °C			
$u(\delta\alpha)$	Diferencia entre los coeficientes de dilatación de los bloques	0,58 x 10^{-6} °C^{-1}	$-l_S\theta$	2,9	50
$u(\delta\theta)$	Diferencia de temperatura entre los bloques	0,029 °C	$-l_S\alpha_S$	16,6	2
					$u_c^2(l) = \sum u_i^2(l) = 1002\ \text{nm}^2$ $u_c(l) = 32\ \text{nm}$ $\nu_{\text{eff}}(l) = 16$

H.1.3.4 Incertidumbre de la desviación de temperatura del bloque patrón, $u(\theta)$

El registro de temperatura del banco de calibración indica (19,9 ± 0,5) °C, aunque no se ha registrado la temperatura durante las observaciones individuales. La desviación máxima observada, Δ = 0,5 °C, representa la amplitud de una variación aproximadamente cíclica de la temperatura en un sistema termostático, no la incertidumbre de la temperatura media. El valor de la desviación media de temperatura es

$$\overline{\theta} = 19{,}9\ °\text{C} - 20\ °\text{C} = -0{,}1\ °\text{C}$$

con una incertidumbre típica debida a la incertidumbre de la temperatura media del banco de calibración de

$$u(\overline{\theta}) = 0{,}2\ °\text{C}$$

mientras que la variación cíclica en función del tiempo produce una distribución de temperatura en forma de U (arco seno), cuya incertidumbre típica es

$$u(\Delta) = (0{,}5\ ^\circ\mathrm{C}) / \sqrt{2} = 0{,}35\ ^\circ\mathrm{C}$$

La desviación de temperatura θ puede tomarse igual a $\overline{\theta}$, y la incertidumbre típica de θ se obtiene a partir de

$$u^2(\theta) = u^2(\overline{\theta}) + u^2(\Delta) = 0{,}165\ ^\circ\mathrm{C}^2$$

lo que da como resultado

$$u(\theta) = 0{,}41\ ^\circ\mathrm{C}$$

Como $c_\theta = \partial f / \partial \theta = -l_S \delta\alpha = 0$, según se indica en H.1.3, esta incertidumbre no contribuye en modo alguno a la incertidumbre de l de primer orden, aunque sí aporta una contribución de segundo orden, que se evalúa en H.1.7.

H.1.3.5 Incertidumbre de la diferencia entre los coeficientes de dilatación, $u(\delta\alpha)$

La variabilidad estimada de $\delta\alpha$ es de $\pm 1 \times 10^{-6}\ ^\circ\mathrm{C}^{-1}$, con idéntica probabilidad de que $\delta\alpha$ tome cualquier valor dentro de dichos límites. La incertidumbre típica es pues

$$u(\delta\alpha) = (1 \times 10^{-6}\ ^\circ\mathrm{C}^{-1}) / \sqrt{3} = 0{,}58 \times 10^{-6}\ ^\circ\mathrm{C}^{-1}$$

H.1.3.6 Incertidumbre de la diferencia de temperatura entre los bloques, $u(\delta\theta)$

Se supone que el bloque patrón y el bloque en calibración están a la misma temperatura, pero puede existir una diferencia de temperatura entre ambos, con igual probabilidad de estar comprendida en el intervalo de −0,05 °C a +0,05 °C. La incertidumbre típica es pues

$$u(\delta\theta) = (0{,}05\ ^\circ\mathrm{C}) / \sqrt{3} = 0{,}029\ ^\circ\mathrm{C}$$

H.1.4 Incertidumbre típica combinada

La incertidumbre típica combinada $u_c(l)$ se calcula a partir de la ecuación (H.5). Los términos individuales son agrupados y sustituidos en esta expresión, obteniéndose

$$\begin{aligned} u_c^2(l) = {} & (25\ \mathrm{nm})^2 + (9{,}7\ \mathrm{nm})^2 + (0{,}05\ \mathrm{m})^2(-0{,}1\ ^\circ\mathrm{C})^2\,(0{,}58 \times 10^{-6}\ ^\circ\mathrm{C}^{-1})^2 + \\ & + (0{,}05\ \mathrm{m})^2\,(11{,}5 \times 10^{-6}\ ^\circ\mathrm{C}^{-1})^2\,(0{,}029\ ^\circ\mathrm{C})^2 = \end{aligned} \tag{H.6a}$$

$$= (25\ \mathrm{nm})^2 + (9{,}7\ \mathrm{nm})^2 + (2{,}9\ \mathrm{nm})^2 + (16{,}6\ \mathrm{nm})^2 = 1002\ \mathrm{nm}^2 \tag{H.6b}$$

o bien

$$u_c(l) = 32\ \mathrm{nm} \tag{H.6c}$$

La componente dominante de la incertidumbre es claramente la del patrón, $u(l_S) = 25$ nm.

H.1.5 Resultado final

El certificado de calibración del bloque patrón indica $l_S = 50{,}000\ 623$ mm como longitud a 20 °C. La media aritmética $\overline{d}$ de cinco observaciones repetidas de la diferencia de longitud entre el bloque desconocido y el bloque patrón es 215 nm. Como $l = l_S + \overline{d}$ (véase H.1.2), la longitud l del bloque desconocido, a 20 °C, es 50,000 838 mm. De acuerdo con 7.2.2, el resultado final de la medición puede enunciarse en la forma:

> l = 50,000 838 mm, con una incertidumbre típica combinada u_c = 32 nm. La incertidumbre típica combinada relativa correspondiente es $u_c / l = 6,4 \times 10^{-7}$.

H.1.6 Incertidumbre expandida

Supongamos que se desea obtener una incertidumbre expandida $U_{99} = k_{99}\, u_c(l)$ que proporcione un intervalo correspondiente a un nivel de confianza de un 99 % aproximadamente. El procedimiento a utilizar es el resumido en G.6.4, y el número de grados de libertad viene indicado en la tabla H.1. Estos se obtuvieron como sigue:

1) *Incertidumbre de la calibración del patrón*, $u(l_S)$ [H.1.3.1]. El certificado de calibración especifica que el número efectivo de grados de libertad de la incertidumbre típica combinada, que ha permitido obtener la incertidumbre expandida que se indica, es $\nu_{\text{eff}}(l_S) = 18$.

2) *Incertidumbre de la diferencia de longitudes medida*, $u(d)$ [H.1.3.2]. Aunque $\overline{d}$ se ha obtenido a partir de cinco observaciones repetidas, como $u(\overline{d})$ se obtuvo a partir de una desviación típica experimental basada en 25 observaciones, los grados de libertad de $u(\overline{d})$ son $\nu(\overline{d}) = 25 - 1 = 24$ (véase nota de H.3.6). Los grados de libertad de $u(d_1)$, incertidumbre debida a los efectos aleatorios sobre el comparador, son $\nu(d_1) = 6 - 1 = 5$, puesto que d_1 se obtuvo a partir de 6 mediciones repetidas. La incertidumbre (± 0,02 μm) debida a los efectos sistemáticos sobre el comparador puede suponerse con una fiabilidad de un 25 %, resultando entonces, a partir de la ecuación (G.3) de G.4.2, que el número de grados de libertad es $\nu(d_2) = 8$ (véase el ejemplo de G.4.2). El número efectivo de grados de libertad de $u(d)$, $\nu_{\text{eff}}(d)$, se obtiene a partir de la ecuación (G.2b) de G.4.1:

$$\nu_{eff}(d) = \frac{\left[u^2(\overline{d}) + u^2(d_1) + u^2(d_2)\right]^2}{\dfrac{u^4(\overline{d})}{\nu(\overline{d})} + \dfrac{u^4(d_1)}{\nu(d_1)} + \dfrac{u^4(d_2)}{\nu(d_2)}} = \frac{(9{,}7\ \text{nm})^4}{\dfrac{(5{,}8\ \text{nm})^4}{24} + \dfrac{(3{,}9\ \text{nm})^4}{5} + \dfrac{(6{,}7\ \text{nm})^4}{8}} = 25{,}6$$

3) *Incertidumbre de la diferencia entre los coeficientes de dilatación*, $u(\delta\alpha)$ [H.1.3.5]. Los límites estimados, $\pm 1 \times 10^{-6}$ °C^{-1}, para la variabilidad de $\delta\alpha$ se consideran fiables al 10 %. Esto da, según la ecuación (G.3) de G.4.2, $\nu(\delta\alpha) = 50$.

4) *Incertidumbre de la diferencia entre las temperaturas de los bloques*, $u(\delta\theta)$ [H.1.3.6]. El intervalo estimado, de −0,05 °C a +0,05 °C, para la diferencia de temperatura $\delta\theta$ se supone con una fiabilidad de un 50 %, lo que da, a partir de la ecuación (G.3) de G.4.2, $\nu(\delta\theta) = 2$.

El cálculo de $\nu_{\text{eff}}(l)$ a partir de la ecuación (G.2b) de G.4.1 se realiza exactamente igual que el cálculo de $\nu_{\text{eff}}(d)$ realizado anteriormente en 2). Así, a partir de las ecuaciones (H.6b) y (H.6c), y de los valores de ν dados en los subapartados desde 1) a 4),

$$\nu_{eff}(l) = \frac{(32\ \text{nm})^4}{\dfrac{(25\ \text{nm})^4}{18} + \dfrac{(9{,}7\ \text{nm})^4}{25{,}6} + \dfrac{(2{,}9\ \text{nm})^4}{50} + \dfrac{(16{,}6\ \text{nm})^4}{2}} = 16{,}7$$

Para obtener la incertidumbre expandida requerida, debe redondearse primeramente este valor al número entero inmediatamente inferior $\nu_{eff}(l) = 16$. De la tabla G.2 del anexo G se obtiene $t_{99}(16) = 2{,}92$ y de aquí $U_{99} = t_{99}(16)\, u_c(l) = 2{,}92 \times (32\ \text{nm}) = 93$ nm. Según 7.2.4, el resultado final de la medición puede enunciarse como sigue:

l = (50,000 838 ± 0,000 093) mm, donde el número que sigue al símbolo ± es el valor numérico de una incertidumbre expandida $U = k\, u_c$, con U determinada a partir de una incertidumbre típica combinada u_c = 32 nm y un factor de cobertura k = 2,92 basado en una distribución t con 16 grados de libertad, la cual define un intervalo con un nivel de confianza del 99 %. La correspondiente incertidumbre expandida relativa es $U / l = 1{,}9 \times 10^{-6}$.

H.1.7 Términos de segundo orden

La nota de 5.1.2 precisa que la ecuación (10), utilizada en este ejemplo para obtener la incertidumbre típica combinada $u_c(l)$, debe completarse cuando la no linealidad de la función $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$ es tan significativa que no pueden despreciarse los términos de mayor grado en el desarrollo en serie de Taylor. Esto es lo que sucede en este ejemplo, donde la evaluación de $u_c(l)$ mostrada hasta ahora no es completa. Aplicando la expresión dada en la nota de 5.1.2 a la ecuación (H.3), se obtienen dos términos de segundo orden distintos y no despreciables, que es necesario añadir a la ecuación (H.5). Estos términos, que provienen del término cuadrático en la expresión de la nota señalada, son

$$l_S^2\, u^2(\delta\alpha)\, u^2(\theta) + l_S^2\, u^2(\alpha_S)\, u^2(\delta\theta)$$

aunque solamente el primero de ellos contribuye significativamente a $u_c(l)$:

$$l_S\, u(\delta\alpha)\, u(\theta) = (0{,}05\ \mathrm{m})(0{,}58 \times 10^{-6}\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1})(0{,}41\ {}^\circ\mathrm{C}) = 11{,}7\ \mathrm{nm}$$

$$l_S\, u(\alpha_S)\, u(\delta\theta) = (0{,}05\ \mathrm{m})(1{,}2 \times 10^{-6}\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1})(0{,}029\ {}^\circ\mathrm{C}) = 1{,}7\ \mathrm{nm}$$

Los términos de segundo orden incrementan $u_c(l)$ desde 32 nm a 34 nm.

H.2 Medición simultánea de una resistencia y una reactancia

Este ejemplo muestra el tratamiento de múltiples mensurandos o magnitudes de salida, determinadas simultáneamente en la misma medición, así como la correlación entre sus estimaciones. Solamente se consideran las variaciones aleatorias de las observaciones; en la práctica real, las incertidumbres de las correcciones por efectos sistemáticos deberían contribuir también a la incertidumbre de los resultados de medida. Los datos son analizados de dos formas distintas, conduciendo esencialmente a los mismos valores numéricos.

H.2.1 Definición del problema de medición

La resistencia R y la reactancia X de un elemento de un circuito se determinan midiendo la amplitud V de la diferencia de potencial alterna sinusoidal entre sus bornes, la amplitud de la intensidad de corriente alterna I que lo atraviesa, y el desfase ϕ entre la diferencia de potencial y la corriente alterna. Así, resulta que las tres magnitudes de entrada son V, I y ϕ, mientras que las magnitudes de salida, los mensurandos, son las tres componentes de la impedancia R, X y Z. Como $Z^2 = R^2 + X^2$, solo hay dos magnitudes de salida independientes.

H.2.2 Modelo matemático y datos

Los mensurandos están ligados a las magnitudes de entrada por la ley de Ohm

$$R = \frac{V}{I}\cos\phi\ ;\ X = \frac{V}{I}\,\mathrm{sen}\,\phi\ ;\ Z = \frac{V}{I} \tag{H.7}$$

Se considera que se han obtenido cinco conjuntos independientes de observaciones simultáneas de las tres magnitudes de entrada V, I y ϕ, en condiciones análogas (véase B.2.15), de donde resultan los datos que se presentan en la tabla H.2. La tabla también muestra las medias aritméticas de las observaciones, y las desviaciones típicas experimentales de estas medias, calculadas mediante las ecuaciones (3) y (5) de 4.2. Las medias son consideradas como las mejores estimaciones de los valores esperados de las magnitudes de entrada y las desviaciones típicas experimentales son las incertidumbres típicas de estas medias.

Como las medias $\overline{V}$, $\overline{I}$ y $\overline{\phi}$ han sido obtenidas a partir de observaciones simultáneas, se hallan correlacionadas, y deben tenerse en cuenta estas correlaciones en la evaluación de las incertidumbres típicas de los mensurandos R, X y Z. Los coeficientes de correlación necesarios se obtienen fácilmente a partir de la ecuación (14) de 5.2.2, utilizando los valores de $s(\overline{V},\overline{I})$, $s(\overline{V},\overline{\phi})$ y $s(\overline{I},\overline{\phi})$ calculados a partir de la ecuación (17) de 5.2.3. Los resultados se incluyen en la tabla H.2, debiendo recordarse que $r(x_i,x_j) = r(x_j,x_i)$ y que $r(x_i,x_i) = 1$.

Tabla H.2: Valores de las magnitudes de entrada *V*, *I* y ϕ, obtenidos a partir de cinco conjuntos de observaciones simultáneas

Conjunto número	**Magnitudes de entrada**		
k	V (V)	I (mA)	ϕ (rad)
1	5,007	19,663	1,045 6
2	4,994	19,639	1,043 8
3	5,005	19,640	1,046 8
4	4,990	19,685	1,042 8
5	4,999	19,678	1,043 3
Media aritmética	$\overline{V} = 4{,}999\ 0$	$\overline{I} = 19{,}661\ 0$	$\overline{\phi} = 1{,}044\ 46$
Desviación típica experimental de la media	$s(\overline{V}) = 0{,}003\ 2$	$s(\overline{I}) = 0{,}009\ 5$	$s(\overline{\phi}) = 0{,}000\ 75$
Coeficientes de correlación			
$r(\overline{V},\overline{I}) = -0{,}36$ $r(\overline{V},\overline{\phi}) = 0{,}86$ $r(\overline{I},\overline{\phi}) = -0{,}65$			

H.2.3 Resultados: aproximación nº 1

La aproximación nº 1 se resume en la tabla H.3.

Los valores de los tres mensurandos R, X y Z se obtienen a partir de las relaciones dadas en la ecuación (H.7), utilizando los valores medios $\overline{V}$, $\overline{I}$ y $\overline{\phi}$ de V, I y ϕ, dados en la tabla H.2. Las incertidumbres típicas de R, X y Z se obtienen a partir de la ecuación (16) de 5.2.2 ya que, como se indicó anteriormente, las magnitudes de entrada, $\overline{V}$, $\overline{I}$ y $\overline{\phi}$, están correlacionadas. Por ejemplo, consideremos $Z = \overline{V}/\overline{I}$. Identificando $\overline{V}$ con x_1, $\overline{I}$ con x_2 y f con $Z = \overline{V}/\overline{I}$, la ecuación (16) de 5.2.2 da, para la incertidumbre típica combinada de Z:

$$u_c^2(Z) = \left[\frac{1}{\overline{I}}\right]^2 u^2(\overline{V}) + \left[\frac{\overline{V}}{\overline{I}^2}\right]^2 u^2(\overline{I}) + 2\left[\frac{1}{\overline{I}}\right]\left[-\frac{\overline{V}}{\overline{I}^2}\right] u(\overline{V})u(\overline{I})r(\overline{V},\overline{I}) \tag{H.8a}$$

$$u_c^2 = Z^2\left[\frac{u(\overline{V})}{\overline{V}}\right]^2 + Z^2\left[\frac{u(\overline{I})}{\overline{I}}\right] - 2Z^2\left[\frac{u(\overline{V})}{\overline{V}}\right]\left[\frac{u(\overline{I})}{\overline{I}}\right] r(\overline{V},\overline{I})^2 \tag{H.8b}$$

o

$$u_{c,r}^2(\overline{Z}) = u_r^2(\overline{V}) + u_r^2(\overline{I}) - 2u_r(\overline{V})u_r(\overline{I})r(\overline{V},\overline{I}) \tag{H.8c}$$

donde $u(\overline{V}) = s(\overline{V})$, $u(\overline{I}) = s(\overline{I})$, y donde el subíndice “r” en la última expresión indica que u es una incertidumbre relativa. Sustituyendo los adecuados valores de la tabla H.2 en la ecuación (H.8a) se obtiene $u_c(Z) = 0{,}236\ \Omega$.

Puesto que los tres mensurandos o magnitudes de salida dependen de las mismas magnitudes de entrada, también están correlacionados entre sí. Los elementos de la matriz de covarianzas que describe la correlación, pueden escribirse, en el caso más general como

$$u(y_l, y_m) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial y_m}{\partial x_j}u(x_i)u(x_j)r(x_i, x_j) \tag{H.9}$$

donde $y_l = f_l\ (x_1, x_2, ..., x_N)$ e $y_m = f_m\ (x_1, x_2, ..., x_N)$. La ecuación (H.9) es una generalización de la ecuación (F.2) de F.1.2.3 cuando las q_l de dicha expresión están correlacionadas. Los coeficientes de correlación estimados de las magnitudes de entrada vienen dados por $r(y_l, y_m) = u(y_l, y_m)\ /\ u(y_l)u(y_m)$, tal como se indica en la ecuación (14) de 5.2.2. Debe observarse que los elementos diagonales de la matriz de covarianzas, $u(y_l,y_l) \equiv u^2(y_l)$ son las varianzas estimadas de las magnitudes de salida y_l (véase 5.2.2, nota 2) y que para $m = l$, la ecuación (H.9) es idéntica a la ecuación (16) de 5.2.2.

Para aplicar la ecuación (H.9) a este ejemplo, se procede a realizar los siguientes cambios de variable:

$$\begin{array}{lll} y_1 = R & x_1 = \overline{V} & u(x_i) = s(x_i) \\ y_2 = X & x_2 = \overline{I} & N = 3 \\ y_3 = Z & x_3 = \overline{\phi} & \end{array}$$

Los resultados de los cálculos de R, X y Z y de las estimaciones de sus varianzas y coeficientes de correlación se dan en la tabla H.3.

Tabla H.3: Valores de las magnitudes de salida R, X y Z, calculados según la aproximación nº 1

Índice del mensurando l	**Relación entre la estimación del mensurando y_l y las estimaciones de entrada x_i**	**Valor de la estimación y_l (resultado de medida)**	**Incertidumbre típica combinada $u_c(y_l)$ del resultado de medida**
1	$y_1 = R = (\overline{V}/\overline{I})\cos\overline{\phi}$	$y_1 = R = 127{,}732\ \Omega$	$u_c(R) = 0{,}071\ \Omega$ $u_c(R)/R = 0{,}06 \times 10^{-2}$
2	$y_2 = X = (\overline{V}/\overline{I})\ sen\,\overline{\phi}$	$y_2 = X = 219{,}847\ \Omega$	$u_c(X) = 0{,}295\ \Omega$ $u_c(X)/X = 0{,}13 \times 10^{-2}$
3	$y_3 = Z = (\overline{V}/\overline{I})$	$y_3 = Z = 254{,}260\ \Omega$	$u_c(Z) = 0{,}236\ \Omega$ $u_c(Z)/Z = 0{,}09 \times 10^{-2}$
Coeficientes de correlación $r(y_l, y_m)$			
$r(y_1,y_2) = r(R,X) = -0{,}588$ $r(y_1,y_3) = r(R,Z) = -0{,}485$ $r(y_2,y_3) = r(X,Z) = 0{,}993$			

H.2.4 Resultados: aproximación nº 2

La aproximación nº 2 se resume en la tabla H.4. Como los datos se han obtenido a partir de cinco conjuntos de observaciones, de tres magnitudes de entrada V, I y ϕ, es posible calcular un valor de R, X y Z para *cada conjunto* de datos de entrada, y tomar la media aritmética de los cinco valores individuales para obtener las mejores estimaciones de R, X y Z. La desviación típica experimental de cada media (que es su incertidumbre típica combinada) se calcula a partir de los cinco valores individuales, de la forma habitual [ecuación (5) de 4.2.3] y las covarianzas estimadas de las tres medias se calculan aplicando directamente la ecuación (17) de 5.2.3 a los cinco valores individuales que se utilizaron para el cálculo de cada media. No existe diferencia en los valores de salida, incertidumbres típicas y covarianzas estimadas, proporcionadas por ambas aproximaciones, excepto en los efectos de segundo orden, debido a que los términos $\overline{V}/\overline{I}$ y $\cos\overline{\phi}$ aparecen reemplazados por $\overline{V/I}$ y $\overline{\cos\phi}$.

Para demostrar esta segunda aproximación, la tabla H.4 presenta los valores de R, X y Z calculados para cada uno de los cinco conjuntos de observaciones. Las medias aritméticas, las incertidumbres típicas y los coeficientes de correlación estimados se calculan directamente a partir de dichos valores individuales. La diferencia entre los valores numéricos obtenidos de esta forma y los dados en la tabla H.3 es despreciable.

Tabla H.4: Valores de las magnitudes de salida *R*, *X* y *Z*, calculados según la aproximación nº 2

Conjunto número	**Valores individuales de los mensurandos**		
k	$R = (V/I)\cos\phi$ (Ω)	$X = (V/I)\,\mathrm{sen}\,\phi$ (Ω)	$Z = V/I$ (Ω)
1	127,67	220,32	254,64
2	127,89	219,79	254,29
3	127,51	220,64	254,84
4	127,71	218,97	253,49
5	127,88	219,51	254,04
Media aritmética	$y_1 = \overline{R} = 127{,}732\ \Omega$	$y_2 = \overline{X} = 219{,}847\ \Omega$	$y_3 = \overline{Z} = 254{,}260\ \Omega$
Desviación típica experimental de la media	$s(\overline{R}) = 0{,}071$	$s(\overline{X}) = 0{,}295$	$s(\overline{Z}) = 0{,}236$
Coeficientes de correlación $r(y_l,y_m)$			
$r(y_1,y_2) = r(\overline{R},\overline{X}) = -0{,}588$ $r(y_1,y_3) = r(\overline{R},\overline{Z}) = -0{,}485$ $r(y_2,y_3) = r(\overline{X},\overline{Z}) = 0{,}993$			

Según la terminología de la nota de 4.1.4, la aproximación nº 2 es un ejemplo de obtención de la estimación y, a partir de $\overline{Y} = (\sum_{k=1}^{n} Y_k)/n$, mientras que la aproximación nº 1 es un ejemplo de obtención de y a partir de $y = f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_N)$. Como se precisa en dicha nota, las dos aproximaciones darán en general resultados idénticos, siempre que f sea función lineal de sus magnitudes de entrada (a condición de que a la hora de aplicar la aproximación nº 1 se tengan en cuenta los coeficientes de correlación observados experimentalmente). Si f no es una función lineal, los resultados de la aproximación nº 1 diferirán de los de la aproximación nº 2, dependiendo del grado de no linealidad y de las varianzas y covarianzas estimadas de las X_i. Esto puede comprobarse en la expresión

$$y = f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_N) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{X}_i\, \partial \overline{X}_j} u(\overline{X}_i, \overline{X}_j) + ... \tag{H.10}$$

donde el segundo término de la parte derecha de la ecuación es el término de segundo orden del desarrollo en serie de Taylor de f en función de las X_i (véase también la nota de 5.1.2). En el caso presente, es preferible la aproximación nº 2, pues evita la aproximación $y = f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_N)$ y refleja mejor el procedimiento de medida utilizado, ya que, efectivamente, los datos han sido tomados por grupos.

Por otra parte, la aproximación nº 2 resultaría inadecuada si los datos de la tabla H.2 representaran $n_1 = 5$ observaciones de la diferencia de potencial V, seguidos por $n_2 = 5$ observaciones de la corriente I, y finalmente por $n_3 = 5$ observaciones de la fase ϕ, resultando además totalmente imposible de aplicar si $n_1 \neq n_2 \neq n_3$. (Se trata verdaderamente de un procedimiento inadecuado de medición, ya que la diferencia de potencial y la corriente a través de una impedancia fija están directamente relacionadas entre sí).

Si los datos de la tabla H.2 se reinterpretan de forma que la aproximación nº 2 resulte inadecuada, y si las correlaciones entre las magnitudes V, I y ϕ se suponen inexistentes, entonces los coeficientes de correlación observados carecen de significado y deben tomarse iguales a cero. Si se realiza esto en la tabla H.2, la ecuación (H.9) se reduce a una expresión equivalente a la ecuación (F.2) de F.1.2.3; es decir,

$$u(y_l, y_m) = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial y_m}{\partial x_i}u^2(x_i) \tag{H.11}$$

y su aplicación a los datos de la tabla H.2 da lugar a modificaciones en la tabla H.3, que se muestran en la tabla H.5.

Tabla H.5: Modificaciones en la tabla H.3, con la hipótesis de que los coeficientes de correlación de la tabla H.2 son nulos

Incertidumbre típica combinada $u_c(y_l)$ del resultado de medida
$u_c(R) = 0{,}195\ \Omega$ $u_c(R)/R = 0{,}15 \times 10^{-2}$
$u_c(X) = 0{,}201\ \Omega$ $u_c(X)/X = 0{,}09 \times 10^{-2}$
$u_c(Z) = 0{,}204\ \Omega$ $u_c(Z)/Z = 0{,}08 \times 10^{-2}$
Coeficientes de correlación $r(y_l, y_m)$
$r(y_1,y_2) = r(R,X) = 0{,}056$ $r(y_1,y_3) = r(R,Z) = 0{,}527$ $r(y_2,y_3) = r(X,Z) = 0{,}878$

H.3 Calibración de un termómetro

Este ejemplo ilustra la utilización del método de los mínimos cuadrados para obtener una curva de calibración (recta en este caso), y la forma en que los parámetros de ajuste, pendiente y ordenada en el origen, y sus varianzas y covarianzas estimadas, se utilizan para obtener, a partir de la recta, el valor de una corrección dada y su incertidumbre típica.

H.3.1 Definición del problema de medición

Un termómetro se calibra mediante comparación de $n = 11$ lecturas t_k de temperatura, cada una de ellas de incertidumbre despreciable, con las correspondientes temperaturas de referencia $t_{R,k}$ conocidas, en el intervalo de temperaturas de 21 °C a 27 °C, obteniéndose las correcciones $b_k = t_{R,k} - t_k$ a aplicar a las lecturas. Las correcciones *medidas* b_k y las temperaturas *medidas* t_k son las magnitudes de entrada de la evaluación. Se ajusta una recta de calibración

$$b(t) = y_1 + y_2\,(t - t_0) \tag{H.12}$$

por el método de los mínimos cuadrados a las correcciones y temperaturas medidas. Los parámetros y_1 e y_2, que representan respectivamente la ordenada en el origen y la pendiente de la recta de calibración, son los dos mensurandos o magnitudes de salida a determinar. La temperatura t_0 es una temperatura exacta de referencia, escogida convenientemente; no se trata de un parámetro independiente que vaya a determinarse mediante el ajuste por mínimos cuadrados. Una vez que se determinan y_1 e y_2, así como sus varianzas y covarianzas estimadas, la ecuación (H.12) puede utilizarse para predecir el valor y la incertidumbre típica de la corrección a aplicar al termómetro, para cualquier valor t de temperatura.

H.3.2 Ajuste por el método de mínimos cuadrados

Basándose en el método de los mínimos cuadrados y en las hipótesis hechas en H.3.1, las magnitudes de salida y_1 e y_2, y sus varianzas y covarianzas estimadas, se obtienen minimizando la suma

$$S = \sum_{k=1}^{n}\left[b_k - y_1 - y_2(t_k - t_0)\right]^2$$

lo que conduce a las siguientes ecuaciones para y_1 e y_2, sus varianzas experimentales $s^2(y_1)$ y $s^2(y_2)$ y su coeficiente de correlación estimado $r(y_1,y_2) = s(y_1,y_2) / s(y_1)s(y_2)$, donde $s(y_1,y_2)$ es su covarianza estimada:

$$y_1 = \frac{(\sum b_k)(\sum \theta_k^2) - (\sum b_k\theta_k)(\sum \theta_k)}{D} \tag{H.13a}$$

$$y_2 = \frac{n\sum b_k\theta_k - (\sum b_k)(\sum \theta_k)}{D} \tag{H.13b}$$

$$s^2(y_1) = \frac{s^2\sum \theta_k^2}{D} \tag{H.13c}$$

$$s^2(y_2) = n\frac{s^2}{D} \tag{H.13d}$$

$$r(y_1, y_2) = -\frac{\sum \theta_k}{\sqrt{n\sum \theta_k^2}} \tag{H.13e}$$

$$s^2 = \frac{\sum\left[b_k - b(t_k)\right]^2}{n-2} \tag{H.13f}$$

$$D = n\sum \theta_k^2 - (\sum \theta_k)^2 = n\sum(\theta_k - \bar{\theta})^2 = n\sum(t_k - \bar{t})^2 \tag{H.13g}$$

donde todos los sumatorios van desde $k = 1$ hasta n, siendo $\theta_k = t_k - t_0$, $\bar{\theta} = (\sum \theta_k)/n$ y $\bar{t} = (\sum t_k)/n$; $[b_k - b(t_k)]$ es la diferencia entre la corrección medida u observada b_k a la temperatura t_k y la corrección $b(t_k)$ prevista en la recta de ajuste, de ecuación $b(t) = y_1 + y_2\,(t - t_0)$, para t_k. La varianza s^2 es una medida de la incertidumbre global del ajuste, y el factor $n - 2$ refleja el hecho de que los dos parámetros y_1 e y_2 se determinan a partir de n observaciones y que, en consecuencia, el número de grados de libertad de s^2 es $\nu = n - 2$ (véase G.3.3).

H.3.3 Obtención de los resultados

Los datos a ajustar se indican en la segunda y tercera columnas de la tabla H.6. Tomando t_0 = 20 °C como temperatura de referencia, la aplicación de las ecuaciones (H.13a) a (H.13g) da

$$
\begin{array}{ll}
y_1 = -0{,}171\,2\ °\mathrm{C} & s(y_1) = 0{,}002\,9\ °\mathrm{C} \\
y_2 = 0{,}002\,18 & s(y_2) = 0{,}000\,67 \\
r(y_1,y_2) = -0{,}930 & s = 0{,}003\,5\ °\mathrm{C}
\end{array}
$$

El hecho de que la pendiente y_2 sea más de tres veces mayor que su incertidumbre justifica la elección de una recta de calibración mejor que una corrección media fija.

Tabla H.6: Datos utilizados para obtener una recta de calibración para un termómetro, por el método de los mínimos cuadrados.

Número de lectura k	**Lectura del termómetro** t_k (°C)	**Corrección observada** $b_k = t_{\mathrm{R},k} - t_k$ (°C)	**Corrección predicha** $b(t_k)$ (°C)	**Diferencia entre las correcciones observadas y las predichas** $b_k - b(t_k)$ (°C)
1	21,521	−0,171	−0,167 9	−0,003 1
2	22,012	−0,169	−0,166 8	−0,002 2
3	22,512	−0,166	−0,165 7	−0,000 3
4	23,003	−0,159	−0,164 6	+0,005 6
5	23,507	−0,164	−0,163 5	−0,000 5
6	23,999	−0,165	−0,162 5	−0,002 5
7	24,513	−0,156	−0,161 4	+0,005 4
8	25,002	−0,157	−0,160 3	+0,003 3
9	25,503	−0,159	−0,159 2	+0,000 2
10	26,010	−0,161	−0,158 1	−0,002 9
11	26,511	−0,160	−0,157 0	−0,003 0

La función lineal que corresponde a la recta de calibración puede escribirse, tras los resultados obtenidos para la ordenada en el origen y para la pendiente, como

$$b(t) = -0{,}1712(29)\ °\mathrm{C} + 0{,}002\,18(67)\ (t - 20\ °\mathrm{C}) \tag{H.14}$$

donde las cifras entre paréntesis son las incertidumbres típicas de los valores numéricos inmediatamente precedentes, correspondientes a las últimas cifras de los resultados indicados para la ordenada en el origen y la pendiente (véase 7.2.2). Esta ecuación proporciona el valor predicho de la corrección $b(t)$ para cualquier temperatura t y, en particular, el valor $b(t_k)$ para $t = t_k$. Estos valores aparecen en la cuarta columna de la tabla, mientras que la última columna presenta las diferencias entre los valores medidos y los valores previstos, $b_k - b(t_k)$. El análisis de estas diferencias puede utilizarse para verificar la validez del modelo lineal; existen pruebas de verificación con este objeto [véase referencia (8)], aunque no se consideran en este ejemplo.

H.3.4 Incertidumbre de un valor previsto prefijado

La expresión de la incertidumbre típica combinada del valor previsto de una corrección puede obtenerse fácilmente aplicando la ley de propagación de la incertidumbre, ecuación (16) de 5.2.2, a la ecuación (H.12). Denominando $b(t) = f(y_1,y_2)$ y escribiendo $u(y_1)=s(y_1)$ y $u(y_2)=s(y_2)$, se obtiene

$$u_c^2\left[b(t)\right] = u^2(y_1) + (t-t_0)^2 u^2(y_2) + 2(t-t_0)u(y_1)u(y_2)r(y_1,y_2) \qquad \text{(H.15)}$$

La varianza estimada $u_c^2\left[b(t)\right]$ presenta un mínimo en $t_{\min} = t_0 - u(y_1)r(y_1,y_2)/u(y_2)$, obteniéndose, en este caso $t_{\min}$ = 24,008 5 °C.

Como ejemplo de utilización de la ecuación (H.15), supongamos que tratamos de hallar la corrección del termómetro, y su incertidumbre, para t = 30 °C, valor que se sitúa fuera del intervalo de temperatura dentro del que se calibró el termómetro. Sustituyendo t = 30 °C en la ecuación (H.14), se obtiene

$$b(30\ °\text{C}) = -0{,}149\ 4\ °\text{C}$$

mientras que la ecuación (H.15) se convierte en

$$u_c^2\left[b(30\ ^\circ\text{C})\right] = (0{,}002\ 9\ ^\circ\text{C})^2 + (10\ ^\circ\text{C})^2(0{,}000\ 6\ 7)^2 + 2(10\ ^\circ\text{C})(0{,}002\ 9\ ^\circ\text{C})(0{,}000\ 67)(-0{,}930) = 17{,}1 \times 10^{-6}\ °\text{C}^2$$

o bien

$$u_c\left[b(30\ ^\circ\text{C})\right] = 0{,}004\ 1\ ^\circ\text{C}$$

La corrección a 30 °C es pues -0,149 4 °C, con una incertidumbre típica combinada u_c = 0,004 1 °C, que tiene $\nu = n - 2 = 9$ grados de libertad.

H.3.5 Eliminación de la correlación entre la pendiente y la ordenada

En la ecuación (H.13e) para el cálculo del coeficiente de correlación $r(y_1,y_2)$, si t_0 se escoge de tal forma que $\sum_{k=1}^{n}\theta_k = \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_0) = 0$, será $r(y_1,y_2) = 0$, no estando por tanto correlacionadas y_1 e y_2, simplificándose así el cálculo de la incertidumbre típica de una corrección prevista. Como $\sum_{k=1}^{n}\theta_k = 0$ cuando $t_0 = \bar{t} = \left(\sum_{k=1}^{n} t_k\right)/n$, y en el presente ejemplo $\bar{t}$ = 24,008 5 °C, efectuando un nuevo ajuste por mínimos cuadrados con $t_0 = \bar{t}$ = 24,008 5 °C, se obtendrían los valores no correlacionados de y_1 e y_2. (La temperatura $\bar{t}$ es de nuevo aquella para la que $u^2\left[b(t)\right]$ presenta un mínimo, véase H.3.4). No obstante, no es necesario rehacer el ajuste puesto que puede demostrarse que

$$b(t) = y'_1 + y_2\,(t - \bar{t}) \qquad \text{(H.16a)}$$

$$u_c^2\left[b(t)\right] = u^2(y'_1) + (t-\bar{t})^2 u^2(y_2) \qquad \text{(H.16b)}$$

$$r(y'_1, y_2) = 0 \qquad \text{(H.16c)}$$

donde

$$y'_1 = y_1 + y_2\,(\bar{t} - t_0)$$

$$\bar{t} = t_0 - s(y_1)\,r(y_1,y_2)\,/\,s(y_2)$$

$$s^2(y'_1) = s^2(y_1)[1 - r^2(y_1,y_2)]$$

habiendo realizado en la ecuación (H.16b) las sustituciones $u(y'_1) = s(y'_1)$ y $u(y_2) = s(y_2)$ [véase ecuación (H.15)].

Aplicando estas relaciones a los resultados dados en H.3.3, se obtiene

$$b(t) = -0{,}162\ 5(11) + 0{,}002\ 18(67)(t - 24{,}008\ 5\ °\text{C}) \qquad \text{(H.17a)}$$

$$u_c^2[b(t)] = (0{,}001\ 1)^2 + (t - 24{,}008\ 5\ °C)^2\ (0{,}000\ 67)^2 \tag{H.17b}$$

Puede comprobarse cómo estas ecuaciones dan los mismos resultados que las ecuaciones (H.14) y (H.15), repitiendo el cálculo de b(30 °C) y $u_c[b(30\ °C)]$. En efecto, sustituyendo t = 30 °C en las ecuaciones (H.17a) y (H.17b) se obtiene

$$b(30\ °C) = -0{,}149\ 4\ °C$$

$$u_c[b(30\ °C)].= 0{,}004\ 1\ °C$$

resultados idénticos a los obtenidos en H.3.4. La covarianza estimada entre dos correcciones previstas prefijadas $b(t_1)$ y $b(t_2)$ puede obtenerse a partir de la ecuación (H.9) de H.2.3.

H.3.6 Otras consideraciones

El método de los mínimos cuadrados puede utilizarse para ajustar curvas de mayor grado a puntos experimentales, y también es aplicable a los casos en que los datos individuales poseen sus propias incertidumbres. Para más detalles debe consultarse la bibliografía clásica existente sobre el tema [8]. No obstante, los siguientes ejemplos ilustran dos casos en los que las correcciones medidas b_k no se suponen conocidas con exactitud.

1) Supongamos que cada t_k tiene una incertidumbre despreciable, que cada uno de los n valores $t_{R,k}$ se ha obtenido a partir de una serie de m lecturas repetidas, y que la varianza de estas lecturas, estimada a partir de una gran cantidad de datos, obtenidos durante un periodo de varios meses es s_p^2. La varianza estimada de cada $t_{R,k}$ es $s_p^2/m = u_0^2$ y cada corrección observada $b_k = t_{R,k} - t_k$ tiene *la misma* incertidumbre típica u_0. En estas circunstancias (y con la hipótesis de que no existe ninguna razón para creer que el modelo lineal sea incorrecto), u_0^2 reemplaza a s^2 en las ecuaciones (H.13c) y (H.13d).

   NOTA - Una estimación de la varianza s_p^2, efectuada sobre un conjunto de N series de observaciones independientes de la misma variable aleatoria, se obtiene a partir de

$$s_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \nu_i s_i^2}{\sum_{i=1}^{N} \nu_i}$$

   donde s_i^2 es la varianza experimental de la i-ésima serie de n_i observaciones repetidas e independientes [ecuación (4) de 4.2.2] con un número de grados de libertad $\nu_i = n_i - 1$. El número de grados de libertad de s_p^2 es $\nu = \sum_{i=1}^{N} \nu_i$.

   La varianza experimental s_p^2/m (y la desviación típica experimental $s_p/\sqrt{m}$) de la media aritmética de m observaciones independientes representadas por la estimación de la varianza s_p^2, establecida a partir de un conjunto de datos, tiene también ν grados de libertad.

2) Supongamos que cada t_k tiene una incertidumbre despreciable, que a cada uno de los n valores $t_{R,k}$ se aplica una corrección ε_k, y que cada corrección tiene la misma incertidumbre típica u_a. Entonces, la incertidumbre típica de cada $b_k = t_{R,k} - t_k$ es también u_a, $s^2(y_1)$ es reemplazada por $s^2(y_1) + u_a^2$, y $s^2(y'_1)$ por $s^2(y'_1) + u_a^2$.

H.4 Medición de actividad radiactiva

Este ejemplo es similar al ejemplo H.2, medición simultánea de resistencia y reactancia, en cuanto que los datos pueden analizarse de dos formas distintas, ambas dando prácticamente el mismo resultado numérico. La primera aproximación ilustra una vez más la necesidad de tener en cuenta las correlaciones observadas entre las magnitudes de entrada.

H.4.1 Definición del problema de medición

La actividad desconocida de radon (^{222}Rn) en una muestra de agua se determina mediante conteo del centelleo líquido en comparación con una muestra patrón de radon en agua, de actividad conocida. La actividad desconocida se obtiene midiendo tres fuentes de conteo consistentes en viales de 22 ml de volumen conteniendo aproximadamente 5 g de agua y 12 g de centelleador en emulsión orgánica:

Fuente (a) *patrón* consistente en una masa m_S de solución patrón, de concentración de actividad conocida;

Fuente (b) muestra *vacío (blanco)* de agua idéntica pero no conteniendo sustancia radiactiva alguna, utilizada para obtener el conteo del ruido de fondo;

Fuente (c) *muestra* consistente en una parte alícuota de masa m_x, de concentración de actividad desconocida.

Se realizan seis ciclos de medición sobre las tres fuentes, en el orden patrón - vacío - muestra; la duración del conteo T_0 para cada fuente, corregida por tiempos muertos, es de 60 minutos para cada uno de los seis ciclos. Aunque el conteo del ruido de fondo no puede suponerse constante en la duración total del conteo (65 horas), sin embargo se supone que el número de cuentas obtenido para cada vacío es representativo del ruido de fondo existente durante las mediciones del patrón y de la muestra, dentro del mismo ciclo. Los datos obtenidos se presentan en la tabla H.7, donde

t_S, t_B, t_x son las duraciones desde el instante de referencia $t = 0$ hasta el punto medio de los intervalos de conteo, corregidas por tiempos muertos, $T_0 = 60$ min, para los viales del patrón, del vacío y de la muestra, respectivamente; aunque el valor de t_B se da para completar la información, no es necesario en el análisis;

C_S, C_B, C_x son los números de cuentas registradas durante los intervalos de conteo, corregidos por tiempos muertos, $T_0 = 60$ min, para los viales del patrón, del vacío y de la muestra, respectivamente.

El número de cuentas observado puede expresarse en la forma

$$C_S = C_B + \varepsilon A_S T_0 m_S e^{-\lambda t_S} \tag{H.18a}$$

$$C_x = C_B + \varepsilon A_x T_0 m_x e^{-\lambda t_x} \tag{H.18b}$$

donde

ε es el rendimiento de detección del líquido centelleador para ^{222}Rn, para una composición de fuente dada, suponiendo dicho rendimiento independiente del nivel de actividad;

A_S es la actividad del patrón en el instante de referencia $t = 0$;

A_x es el *mensurando*, definido como la actividad de la muestra en el instante de referencia $t = 0$;

m_S es la masa de la solución patrón;

m_x es la masa de la muestra alícuota;

λ es la constante de desintegración para el ^{222}Rn: $\lambda = (\ln 2)/T_{1/2} = 1{,}258\ 94 \times 10^{-4}$ min^{-1} ($T_{1/2} = 5505{,}8$ min).

Tabla H.7: Datos del conteo para la determinación de la actividad de una muestra desconocida.

Ciclo	Patrón		Vacío		Muestra	
k	t_S (min)	C_S (cuentas)	t_B (min)	C_B (cuentas)	t_x (min)	C_x (cuentas)
1	243,74	15 380	305,56	4 054	367,37	41 432
2	984,53	14 978	1 046,10	3 922	1 107,66	38 706
3	1 723,87	14 394	1 785,43	4 200	1 846,99	35 860
4	2 463,17	13 254	2 524,73	3 830	2 586,28	32 238
5	3 217,56	12 516	3 279,12	3 956	3 340,68	29 640
6	3 956,83	11 058	4 018,38	3 980	4 079,94	26 356

Las ecuaciones (H.18a) y (H.18b) muestran que no es posible realizar directamente la media de los seis valores individuales de C_S o de C_x dados en la tabla H.7, debido al decaimiento exponencial de la actividad del patrón y de la muestra, y a pequeñas variaciones en el conteo del ruido de fondo, de un ciclo a otro. En lugar de esto, deben utilizarse los conteos corregidos por decaimiento y ruido de fondo (o los conteos definidos como el número de cuentas dividido por T_0 = 60 min), lo que supone combinar las ecuaciones (H.18a) y (H.18b) para obtener la siguiente expresión para la actividad desconocida, en función de las magnitudes conocidas:

$$A_x = f(A_S, m_S, m_x, C_S, C_x, C_B, t_S, t_x, \lambda) =$$
$$= A_S \frac{m_S}{m_x} \frac{(C_x - C_B)e^{\lambda t_x}}{(C_S - C_B)e^{\lambda t_S}} = \tag{H.19}$$
$$= A_S \frac{m_S}{m_x} \frac{(C_x - C_B)}{(C_S - C_B)} e^{\lambda(t_x - t_S)}$$

donde $(C_x - C_B)e^{\lambda t_x}$ y $(C_S - C_B)e^{\lambda t_S}$ son los conteos corregidos por ruido de fondo, para la muestra y para el patrón, respectivamente, en el instante de referencia t = 0, y en el intervalo T_0 = 60 min. En su lugar, puede escribirse simplemente

$$A_x = f(A_S, m_S, m_x, R_S, R_x) = A_S \frac{m_S}{m_x} \frac{R_x}{R_S} \tag{H.20}$$

donde los conteos R_x y R_S, corregidos por ruido de fondo y decaimiento, vienen dados por

$$R_x = \left[(C_x - C_B)/T_0\right]e^{\lambda t_x} \tag{H.21a}$$

$$R_S = \left[(C_S - C_B)/T_0\right]e^{\lambda t_B} \tag{H.21b}$$

H.4.2 Análisis de los datos

La tabla H.8 resume los valores de conteo R_S y R_x corregidos por ruido de fondo y decaimiento, obtenidos a partir de las ecuaciones (H.21a) y (H.21b), utilizando los datos de la tabla H.7, con λ = 1,258 94 x 10^{-4} min^{-1}, tal como se indicó anteriormente. Debe observarse que la relación $R = R_x / R_S$ se calcula más fácilmente a partir de la expresión

$$\left[(C_x - C_B)/(C_S - C_B)\right]e^{\lambda(t_x - t_S)}$$

Las medias aritméticas $\overline{R}_S$, $\overline{R}_x$ y $\overline{R}$, así como sus desviaciones típicas experimentales ($s(\overline{R}_S)$, $s(\overline{R}_x)$ y $s(\overline{R})$, se calculan de la forma habitual [ecuaciones (3) y (5) de 4.2]. El coeficiente de correlación $r(\overline{R}_x,\overline{R}_S)$ se calcula a partir de la ecuación (17) de 5.2.3 y de la ecuación (14) de 5.2.2.

Debido a la variabilidad relativamente pequeña de los valores de R_x y de R_S, el cociente de medias $\overline{R}_x\,/\,\overline{R}_S$ y la incertidumbre típica de este cociente, $u(\overline{R}_x\,/\,\overline{R}_S)$, son muy cercanos al cociente medio $\overline{R}$ y a su desviación típica experimental $s(\overline{R})$ respectivamente, tal como se aprecia en la última columna de la tabla H.8 [véase H.2.4 y la ecuación (H.10) de este anexo]. No obstante, para el cálculo de la incertidumbre típica $u(\overline{R}_x\,/\,\overline{R}_S)$, debe tenerse en cuenta la correlación entre R_x y R_S, representada por el coeficiente de correlación $r(\overline{R}_x,\overline{R}_S)$, utilizando la ecuación (16) de 5.2.2. [Esta ecuación proporciona los tres últimos términos de la ecuación (H.22b) para el cálculo de la varianza relativa estimada de $\overline{R}_x\,/\,\overline{R}_S$].

Se hace notar que las desviaciones típicas experimentales de R_x y R_S, $\sqrt{6}s(\overline{R}_x)$ y $\sqrt{6}s(\overline{R}_S)$, indican una variabilidad de estas magnitudes dos o tres veces superior a la que se deriva de la estadística de Poisson respecto al proceso de conteo; esta última se halla incluída en la variabilidad observada en los conteos y no necesita ser considerada por separado.

Tabla H.8: Cálculo de conteos corregidos por decaimiento y ruido de fondo

Ciclo k	R_x (min^{-1})	R_S (min^{-1})	$t_x - t_S$ (min)	$R = R_x/R_S$
1	652,46	194,65	123,63	3,352 0
2	666,48	208,58	123,13	3,195 3
3	665,80	211,08	123,12	3,154 3
4	655,68	241,17	123,11	3,061 5
5	651,87	213,92	123,12	3,047 3
6	623,31	194,13	123,11	3,210 7
	$\overline{R}_x = 652{,}60$ $s(\overline{R}_x) = 6{,}42$ $s(\overline{R}_x)/\overline{R}_x = 0{,}98 \times 10^{-2}$	$\overline{R}_S = 206{,}09$ $s(\overline{R}_S) = 3{,}79$ $s(\overline{R}_S)/\overline{R}_S = 1{,}84 \times 10^{-2}$		$\overline{R} = 3{,}170$ $s(\overline{R}) = 0{,}046$ $s(\overline{R})/\overline{R} = 1{,}44 \times 10^{-2}$
	$\overline{R}_x\,/\,\overline{R}_S = 3{,}167$ $u(\overline{R}_x\,/\,\overline{R}_S) = 0{,}045$ $u(\overline{R}_x\,/\,\overline{R}_S)/\overline{R}_x\,/\,\overline{R}_S = 1{,}42 \times 10^{-2}$			
Coeficiente de correlación				
$r(\overline{R}_x,\overline{R}_S) = 0{,}646$				

H.4.3 Obtención de los resultados finales

Para obtener la actividad desconocida A_x y su incertidumbre típica combinada $u_c(A_x)$ a partir de la ecuación (H.20), es necesario conocer A_S, m_x y m_S, así como sus incertidumbres típicas. A continuación se dan dichos valores:

$$A_S = 0{,}1368 \text{ Bq/g}$$

$$u(A_S) = 0{,}0018 \text{ Bq/g}; \qquad u(A_S)/A_S = 1{,}32 \times 10^{-2}$$

$$m_S = 5{,}0192 \text{ g}$$

$$u(m_S) = 0{,}005 \text{ g}; \qquad u(m_S)/m_S = 0{,}10 \times 10^{-2}$$

$$m_x = 5{,}0571 \text{ g}$$

$$u(m_x) = 0{,}0010 \text{ g}; \qquad u(m_x)/m_x = 0{,}02 \times 10^{-2}$$

Otras fuentes posibles de incertidumbre, consideradas como despreciables, son:

- las incertidumbres típicas de los tiempos de decaimiento, $u(t_{S,k})$ y $u(t_{x,k})$;

- la incertidumbre de la constante de desintegración del ^{222}Rn, $u(\lambda) = 1 \times 10^{-7}\ \text{min}^{-1}$. (La magnitud significativa es el factor de decaimiento, $\exp[\lambda(t_x - t_S)]$, el cual varía entre 1,015 63 para los ciclos k = 4 y 6, y 1,015 70 para el ciclo k = 1. La incertidumbre típica de estos valores es $u = 1{,}2 \times 10^{-5}$);

- la incertidumbre asociada a la posible dependencia del rendimiento de detección del contador de centelleo, de la fuente utilizada (patrón, vacío o muestra);

- la incertidumbre de la corrección por tiempo muerto del contador, y la de la corrección por la dependencia que el rendimiento de conteo tiene del nivel de actividad.

H.4.3.1 Resultados: aproximación nº 1

Como se indicó anteriormente, A_x y $u_c(A_x)$ pueden obtenerse de dos formas diferentes a partir de la ecuación (H.20). Mediante la primera aproximación, A_x se calcula utilizando las medias aritméticas $\overline{R}_x$ y $\overline{R}_S$, lo que conduce a

$$A_x = A_S \frac{m_S}{m_x}\frac{\overline{R}_x}{\overline{R}_S} = 0{,}4300 \text{ Bq/g} \tag{H.22a}$$

La aplicación de la ecuación (16) de 5.2.2 a esta expresión da, para la varianza combinada $u_c^2(A_x)$

$$\frac{u_c^2(A_x)}{A_x^2} = \frac{u^2(A_S)}{A_S^2} + \frac{u^2(m_S)}{m_S^2} + \frac{u^2(m_x)}{m_x^2} + \frac{u^2(\overline{R}_x)}{\overline{R}_x^2} + \frac{u^2(\overline{R}_S)}{\overline{R}_S^2} - 2r(\overline{R}_x, \overline{R}_S)\frac{u(\overline{R}_x)u(\overline{R}_S)}{\overline{R}_x \overline{R}_S} \tag{H.22b}$$

donde, como se indicó en H.4.2, los tres últimos términos proporcionan $u^2(\overline{R}_x / \overline{R}_S)/(\overline{R}_x / \overline{R}_S)^2$; es decir, la varianza relativa estimada de $\overline{R}_x / \overline{R}_S$. De acuerdo con la presentación realizada en H.2.4, los resultados de la tabla H.8 muestran que $\overline{R}$ no es exactamente igual a $\overline{R}_x / \overline{R}_S$ y que la incertidumbre típica de $\overline{R}_x / \overline{R}_S$, $u(\overline{R}_x / \overline{R}_S)$, tampoco es exactamente igual a la incertidumbre típica $s(\overline{R})$ de $\overline{R}$.

Sustituyendo los valores de las correspondientes magnitudes en las ecuaciones (H.22a) y (H.22b), se obtiene

$$\frac{u_c(A_x)}{A_x} = 1{,}93 \times 10^{-2}$$

$$u_c(A_x) = 0{,}0083 \text{ Bq/g}$$

El resultado de la medición puede darse entonces en la forma:

A_x = 0,4300 Bq/g, con una incertidumbre típica combinada u_c = 0,0083 Bq/g.

H.4.3.2 Resultados: aproximación nº 2

En la segunda aproximación, que evita la correlación entre $\overline{R}_x$ y $\overline{R}_S$, A_x se calcula utilizando la media aritmética $\overline{R}$. Así,

$$A_x = A_S \frac{m_S}{m_x}\overline{R} = 0{,}4304 \text{ Bq/g} \tag{H.23a}$$

La expresión para $u_c^2(A_x)$ es simplemente

$$\frac{u_c^2(A_x)}{A_x^2} = \frac{u^2(A_S)}{A_S^2} + \frac{u^2(m_S)}{m_S^2} + \frac{u^2(m_x)}{m_x^2} + \frac{u^2(\overline{R})}{\overline{R}^2} \tag{H.23b}$$

lo que da

$$\frac{u_c(A_x)}{A_x} = 1{,}95 \times 10^{-2}$$

$$u_c(A_x) = 0{,}0084 \text{ Bq/g}$$

El resultado de la medición puede darse pues en la forma:

A_x = 0,430 4 Bq/g, con una incertidumbre típica combinada u_c = 0,0084 Bq/g.

El número efectivo de grados de libertad de u_c puede calcularse utilizando la fórmula de Welch-Satterthwaite, como se ilustra en H.1.6.

Como en H.2, de los dos resultados se recomienda el segundo, pues evita obtener la aproximación de la media de un cociente de dos magnitudes mediante el cociente de las medias de dichas magnitudes, reflejando mejor el procedimiento de medida utilizado, los datos fueron tomados en distintos ciclos.

No obstante, la diferencia entre los valores de A_x resultantes de las dos aproximaciones es visiblemente pequeña comparada con la incertidumbre típica atribuída a cualquiera de ellos, y la diferencia entre las dos incertidumbres típicas es perfectamente despreciable. Tal concordancia demuestra que ambas aproximaciones son equivalentes cuando se incluyen correctamente las correlaciones observadas.

H.5 Análisis de la varianza

Este ejemplo proporciona una breve introducción a los métodos de análisis de la varianza, (ANOVA, en inglés). Estas técnicas estadísticas se utilizan para identificar y cuantificar *efectos aleatorios* individuales en una medición, de forma que puedan ser tenidos en cuenta correctamente a la hora de evaluar la incertidumbre del resultado de medida. Aunque se aplican a una amplia gama de mediciones, por ejemplo a la calibración de patrones de referencia, a los patrones de tensión de diodos Zener, a los patrones de masa, y a la certificación de materiales de referencia, los métodos de análisis de varianza no pueden identificar, por sí mismos, efectos sistemáticos que pudieran estar presentes.

Existen numerosos modelos diferentes incluidos bajo el nombre general de análisis de la varianza ANOVA. Por su importancia, el modelo particular utilizado en este ejemplo es el *diseño anidado compensado o equilibrado*. La ilustración numérica de este modelo se realiza sobre la calibración de un patrón de tensión Zener; el análisis debe poderse aplicar a una gran variedad de casos prácticos de medida.

Los métodos de análisis de la varianza tienen especial importancia en la certificación de materiales de referencia (MR) mediante ensayos interlaboratorios, lo que se trata a fondo en la Guía ISO 35 [19] (véase en H.5.3.2 una breve descripción sobre la certificación de MR). Como la mayor parte del contenido de la Guía ISO 35 es de gran aplicación, puede consultarse esta publicación para detalles complementarios relativos al ANOVA, incluyendo los *diseños anidados no compensados*. También pueden consultarse las referencias [15] y [20].

H.5.1 Definición del problema de medición

Consideremos un patrón de tensión Zener, de valor nominal 10 V, calibrado por comparación con una referencia estable de tensión, durante un período de dos semanas. Cada día J del período, se efectúan K

observaciones repetidas e independientes de la diferencia de potencial V_S del patrón. Si llamamos V_{jk} a la k-ésima observación de V_S (k = 1, 2, ..., K) del j-ésimo día (j = 1, 2, ..., J), la mejor estimación de la diferencia de potencial del patrón es la media aritmética $\overline{V}$ de las JK observaciones [véase ecuación (3) en 4.2.1],

$$V_S = \frac{1}{JK}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} V_{jk} = \overline{V} \tag{H.24a}$$

La desviación típica experimental de la media $s(\overline{V})$, que es una medida de la incertidumbre de $\overline{V}$, valor estimado de la diferencia de potencial del patrón, se obtiene a partir de [véase ecuación (5) en 4.2.3]

$$s^2(\overline{V}) = \frac{1}{JK(JK-1)}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(V_{jk} - \overline{V})^2 \tag{H.24b}$$

NOTA A lo largo de todo este ejemplo se supone que todas las correcciones aplicadas a las observaciones, para compensar los efectos sistemáticos, poseen incertidumbres despreciables, o sus incertidumbres son tales que pueden tenerse en cuenta al final del análisis. La diferencia entre el valor certificado (con una incertidumbre dada) y el valor de trabajo de la referencia de tensión estable, respecto a la cual se calibra el patrón de tensión Zener, es una corrección que pertenece a esta última categoría y que puede aplicarse a la media de las observaciones, al final del análisis. De aquí resulta que la estimación de la diferencia de potencial del patrón, obtenida estadísticamente a partir de las observaciones, no es necesariamente el resultado final de la medición; igualmente, la desviación típica experimental de dicha estimación no es necesariamente la incertidumbre típica combinada del resultado final.

La desviación típica experimental de la media $s(\overline{V})$ obtenida a partir de la ecuación (H.24b) es una medida adecuada de la incertidumbre de $\overline{V}$, solo si la variabilidad de las observaciones realizadas día a día, es igual a la variabilidad de las observaciones en un solo día. Si hay evidencia de que la variabilidad de las observaciones “entre días” es significativamente mayor que la que cabría esperar a partir de la variabilidad de las observaciones “dentro de un día”, la utilización de esta expresión puede conducir a una subestimación importante de la incertidumbre de $\overline{V}$. Surgen entonces dos preguntas: ¿cómo decidir si la variabilidad de las observaciones “entre días” (representada por la componente “entre días” de la varianza) es significativa en comparación con la variabilidad “dentro de un día” (representada por la componente “dentro de un día” de la varianza)? y, si es este el caso, ¿cómo debe evaluarse la incertidumbre de la media?

H.5.2 Ejemplo numérico

H.5.2.1 Los datos que permiten abordar las preguntas anteriores se encuentran en la tabla H.9, donde:

J = 10 es el número de días durante los que se realizan las observaciones de la diferencia de potencial;

K = 5 es el número de observaciones de la diferencia de potencial realizadas cada día;

$$\overline{V}_j = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} V_{jk} \tag{H.25a}$$

es la media aritmética de las K = 5 observaciones de la diferencia de potencial, realizadas el día j-ésimo (hay por tanto J = 10 medias diarias);

$$\overline{V} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\overline{V}_j = \frac{1}{JK}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} V_{jk} \tag{H.25b}$$

es la media aritmética de las J = 10 medias diarias y, por tanto, la media de las JK = 50 observaciones;

$$s^2(V_{jk}) = \frac{1}{K-1}\sum_{k=1}^{K}(V_{jk} - \overline{V}_j)^2 \tag{H.25c}$$

es la varianza experimental de las K = 5 observaciones efectuadas el día j-ésimo (hay, por tanto, J = 10 estimaciones de varianza); y

$$s^2(\overline{V}_j) = \frac{1}{J-1}\sum_{j=1}^{J}(\overline{V}_j - \overline{\overline{V}})^2 \tag{H.25d}$$

es la varianza experimental de las J = 10 medias diarias (solamente hay, por tanto, una única estimación de la varianza).

H.5.2.2 La consistencia entre la variabilidad "dentro de un día" y la variabilidad "entre días" de las observaciones puede verificarse comparando dos estimaciones independientes de σ_{w}^2, la componente "dentro de un día" de la varianza (es decir, la varianza de las observaciones hechas el mismo día).

La primera estimación de σ_{w}^2, representada por s_{a}^2, se obtiene a partir de la variación observada de las medias diarias $\overline{V}_j$. Como $\overline{V}_j$ es la media de K observaciones, su varianza $s^2(\overline{V}_j)$ estima σ_{w}^2/K, bajo la hipótesis de que la componente "entre días" de la varianza sea nula. Se deduce entonces de la ecuación (H.25d) que

$$s_a^2 = K\, s^2(\overline{V}_j) = \frac{K}{J-1}\sum_{j=1}^{J}(\overline{V}_j - \overline{\overline{V}})^2 \tag{H.26a}$$

que es una estimación de σ_{w}^2 con $\nu_{\mathrm{a}} = J - 1 = 9$ grados de libertad.

La segunda estimación de σ_{w}^2, representada por s_{b}^2, es la estimación de la varianza del conjunto de datos obtenidos a partir de los J = 10 valores individuales de $s^2(V_{jk})$, utilizando la ecuación de la nota de H.3.6, donde los diez valores individuales se calculan a partir de la ecuación (H.25c). Como el número de grados de libertad de cada uno de estos valores es $\nu_i = K - 1$, la expresión que resulta para s_{b}^2 es simplemente su media. Entonces

$$s_b^2 = \overline{s^2(V_{jk})} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}s^2(V_{jk}) = \frac{1}{J(K-1)}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(V_{jk} - \overline{V}_j)^2 \tag{H.26b}$$

que es una estimación de σ_{w}^2 con $\nu_{\mathrm{b}} = J(K - 1) = 40$ grados de libertad.

Las estimaciones de σ_{w}^2 obtenidas mediante las ecuaciones (H.26a) y (H.26b) son, respectivamente, $s_{\mathrm{a}}^2 = (128\ \mu\mathrm{V})^2$ y $s_{\mathrm{b}}^2 = (85\ \mu\mathrm{V})^2$, (véase tabla H.9). Dado que la estimación s_{a}^2 se basa en la variabilidad de los valores medios diarios, mientras que la estimación s_{b}^2 se basa en la variabilidad de las observaciones diarias, su diferencia indica la posible presencia de algún resultado que varía de un día para otro, pero que permanece relativamente constante cuando las observaciones se hacen el mismo día. Se utiliza el test F para comprobar esta posibilidad y, en consecuencia, que la hipótesis de la componente "entre días" de la varianza sea nula.

H.5.2.3 La distribución F es la distribución de probabilidad de la razón $F(\nu_{\mathrm{a}},\nu_{\mathrm{b}}) = s_{\mathrm{a}}^2(\nu_{\mathrm{a}})/s_{\mathrm{b}}^2(\nu_{\mathrm{b}})$ entre dos estimaciones independientes $s_{\mathrm{a}}^2(\nu_{\mathrm{a}})$ y $s_{\mathrm{b}}^2(\nu_{\mathrm{b}})$ de la varianza σ^2 de una variable aleatoria que sigue una distribución normal [15]. Los parámetros ν_{a} y ν_{b} son los grados de libertad de las dos estimaciones, y siendo $0 \le F(\nu_{\mathrm{a}},\nu_{\mathrm{b}}) \le \infty$. Los valores de F se encuentran tabulados para los diferentes valores de ν_{a} y ν_{b} y para varios percentiles de la distribución F. Un valor de $F(\nu_{\mathrm{a}},\nu_{\mathrm{b}}) > F_{0,95}$ o $F(\nu_{\mathrm{a}},\nu_{\mathrm{b}}) > F_{0,975}$ (valor crítico) se interpreta habitualmente como indicativo de que $s_{\mathrm{a}}^2(\nu_{\mathrm{a}})$ es mayor que $s_{\mathrm{b}}^2(\nu_{\mathrm{b}})$ en una cantidad estadísticamente significativa, y que la probabilidad de un valor de F tan grande como el observado, si ambas son estimaciones de la misma varianza, es inferior a 0,05 o a 0,025 respectivamente. (Pueden escogerse también otros valores críticos, por ejemplo, $F_{0,99}$).

Tabla H.9: Resumen de los datos de calibración de tensión obtenidos durante $J = 10$ días, con medias $\overline{V}_j$ y desviaciones típicas experimentales $s(V_{jk})$, correspondientes a $K = 5$ observaciones independientes repetidas diariamente.

Magnitud	**Día**, j				
	1	2	3	4	5
$\overline{V}_j$ / (V)	10,000 172	10,000 116	10,000 013	10,000 144	10,000 106
$s(V_{jk})$ / (μV)	60	77	111	101	67

Magnitud	**Día**, j				
	6	7	8	9	10
$\overline{V}_j$ / (V)	10,000 031	10,000 060	10,000 125	10,000 163	10,000 041
$s(V_{jk})$ / (μV)	93	80	73	88	86

$\overline{V} = 10{,}000\ 097$ V	$s(\overline{V}_j) = 57$ μV
$s_a^2 = Ks^2(\overline{V}_j) = 5\ (57\ \mu\text{V})^2 = (128\ \mu\text{V})^2$	$s_b^2 = \overline{s^2(V_{jk})} = (85\ \mu\text{V})^2$

H.5.2.4 La aplicación del test F al presente ejemplo numérico da

$$F(\nu_a, \nu_b) = \frac{s_a^2}{s_b^2} = \frac{Ks^2(\overline{V}_j)}{\overline{s^2(V_{jk})}} = \frac{5\ (57\ \mu\text{V})^2}{(85\ \mu\text{V})^2} = 2{,}25 \tag{H.27}$$

con $\nu_a = J - 1 = 9$ grados de libertad, en el numerador, y $\nu_b = J(K - 1) = 40$ grados de libertad, en el denominador. Dado que $F_{0,95}(9,40) = 2{,}12$ y $F_{0,975}(9,40) = 2{,}45$, se concluye que existe un efecto "entre días" estadísticamente significativo, para un nivel de significación del 5 %, pero no para un nivel del 2,5 %.

H.5.2.5 Si se rechazara la existencia de un efecto "entre días", porque la diferencia entre s_a^2 y s_b^2 no se considerara estadísticamente significativa (decisión imprudente puesto que podría conducir a subestimar la incertidumbre), la varianza estimada $s^2(\overline{V})$ de $\overline{V}$ debería calcularse a partir de la ecuación (H.24b). Esta relación equivale a considerar conjuntamente las estimaciones s_a^2 y s_b^2, (tomando unos valores de s_a^2 y s_b^2 ponderados según su número respectivo de grados de libertad ν_a y ν_b, véase nota de H.3.6) para obtener la mejor estimación de la varianza de las observaciones, y dividir posteriormente esta estimación por JK, número de observaciones, para obtener la mejor estimación $s^2(\overline{V})$ de la varianza de la media de las observaciones. Siguiendo este procedimiento se obtiene

$$s^2(\overline{V}) = \frac{(J-1)s_a^2 + J(K-1)s_b^2}{JK(JK-1)} = \frac{9\,(128\,\mu\text{V})^2 + 40\,(85\,\mu\text{V})^2}{(10)(5)(49)} \tag{H.28a}$$

$$s^2(\overline{V}) = (13\ \mu\text{V})^2, \quad \text{o} \quad s(\overline{V}) = 13\ \mu\text{V} \tag{H.28b}$$

con $s(\overline{V})$ teniendo $JK - 1 = 49$ grados de libertad.

Si se supone que todas las correcciones por efectos sistemáticos han sido ya consideradas y que las demás componentes de la incertidumbre son despreciables, entonces el resultado de la calibración puede expresarse como $V_S = \overline{V} = 10{,}000\ 097$ V (véase tabla H.9), con una incertidumbre típica combinada $s(\overline{V}) = u_c = 13$ μV, con 49 grados de libertad.

NOTA 1 En la práctica, existirán probablemente componentes de incertidumbre suplementarias, que serán significativas y deberán, en consecuencia, combinarse con la componente de incertidumbre obtenida estadísticamente a partir de las observaciones (véase nota de H.5.1).

NOTA 2 Puede demostrarse que la ecuación (H.28a) para $s^2(\overline{V})$ es equivalente a la ecuación (H.24b), si el doble sumatorio que figura en ésta, y que notaremos como S, lo escribimos de la forma

$$S = \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\left[(V_{jk} - \overline{V}_j) + (\overline{V}_j - \overline{V})\right]^2 = (J-1)s_a^2 + J(K-1)s_b^2$$

H.5.2.6 Si se aceptara la existencia de un efecto "entre días" (decisión prudente puesto que evita una posible subestimación de la incertidumbre) y se le supone un carácter aleatorio, entonces la varianza $s^2(\overline{V}_j)$ calculada a partir de las $J = 10$ medias diarias según la ecuación (H.25d) no estima σ_W^2/K, como sucedía en H.5.2.2, sino $\sigma_W^2/K + \sigma_B^2$, donde σ_B^2 es la componente aleatoria de la varianza "entre días". Esto implica que

$$s^2(\overline{V}_j) = s_W^2 / K + s_B^2 \qquad \text{(H.29)}$$

donde s_W^2 estima a σ_W^2, y s_B^2 a σ_B^2. Puesto que $\overline{s^2(V_{jk})}$ calculada a partir de la ecuación (H.26b) depende únicamente de la variabilidad "dentro día" de las observaciones, puede tomarse $s_W^2 = \overline{s^2(V_{jk})}$. La relación $Ks^2(\overline{V}_j)/\overline{s^2(V_{jk})}$ utilizada para el test F en H.5.2.4 se convierte entonces en

$$F = \frac{Ks^2(\overline{V}_j)}{\overline{s^2(V_{jk})}} = \frac{s_W^2 + Ks_B^2}{s_W^2} = \frac{5\ (57\ \mu\text{V})^2}{(85\ \mu\text{V})^2} = 2{,}25 \qquad \text{(H.30)}$$

lo que conduce a

$$s_B^2 = \frac{K\, s^2(\overline{V}_j) - \overline{s^2(V_{jk})}}{K} \qquad \text{(H.31a)}$$

$$s_B^2 = (43\ \mu\text{V})^2, \quad \text{o} \quad s_B = 43\ \mu\text{V}$$

$$s_W^2 = \overline{s^2(V_{jk})} = (85\ \mu\text{V})^2, \quad \text{ó} \quad s_w = 85\ \mu\text{V} \qquad \text{(H.31b)}$$

La varianza estimada de $\overline{V}$ se obtiene a partir de $s^2(\overline{V}_j)$, ecuación (H.25d), puesto que $s^2(\overline{V}_j)$ refleja correctamente ambas componentes aleatorias de la varianza "dentro de un día" y "entre días" [véase ecuación (H.29)]. Entonces

$$s^2(\overline{V}) = s^2(\overline{V}_j) / J \qquad \text{(H.32)}$$

$$(57\ \mu\text{V})^2 / 10, \quad \text{o} \quad s(\overline{V}) = 18\ \mu\text{V}$$

con $J - 1 = 9$ grados de libertad.

El número de grados de libertad de s_w^2 (y por tanto de s_w) es $J(K-1) = 40$ [véase ecuación (H.26b)]. El número de grados de libertad de s_B^2 (y por tanto de s_B) es el número efectivo de grados de libertad de la diferencia $s_B^2 = s^2(\overline{V}_j) - \overline{s^2(V_{jk})}/K$ [ecuación (H.31a)], aunque su estimación es problemática.

H.5.2.7 La mejor estimación de la diferencia de potencial del patrón de tensión es pues $V_S = \overline{V} = 10{,}000\ 097$ V, con $s(\overline{V}) = u_c = 18$ μV, dada por la ecuación (H.32). Compárese este valor de u_c y sus 9 grados de libertad con $u_c = 13$ μV y sus 49 grados de libertad, resultado obtenido en H.5.2.5 [ecuación (H.28b], cuando se había descartado la existencia de un efecto “entre días”.

En una medición real, los efectos “entre días” aparentes deben, en lo posible, estudiarse a fondo, con objeto de determinar su causa, debiendo comprobarse también si hay efectos sistemáticos presentes, lo que impediría la utilización de los métodos de análisis de la varianza. Tal como se dijo al comienzo de este ejemplo, las técnicas de análisis de la varianza están concebidas para identificar y evaluar las componentes de la incertidumbre provenientes de efectos aleatorios, pero no proporcionan información acerca de las componentes derivadas de efectos sistemáticos.

H.5.3 Papel del análisis de la varianza (ANOVA) en la medición

H.5.3.1 Este ejemplo del patrón de tensión ilustra lo que generalmente se conoce con el nombre de diseño anidado compensado, de un nivel. El nombre deriva del hecho de que, en efecto, sólo existe un único nivel de “anidamiento” de las observaciones, con un solo factor, el día durante el que se realizan las observaciones, el cual varía durante la medición. Asimismo, es compensado porque cada día se efectúa el mismo número de observaciones. Un análisis similar al que se presenta en este ejemplo puede utilizarse para determinar si existe un “efecto operador”, un “efecto instrumento”, un “efecto laboratorio”, un “efecto muestra”, o incluso un “efecto método”, en una medición particular. Así, en el ejemplo, imaginemos que reemplazamos las observaciones hechas en diferentes días *J*, por observaciones hechas el mismo día pero por diferentes operadores *J*; entonces, la componente “entre días” de la varianza se transforma en una componente de la varianza asociada a los distintos operadores.

H.5.3.2 Como se indicó en H.5, los métodos de análisis de la varianza se utilizan ampliamente en la certificación de materiales de referencia (MR) mediante ensayos interlaboratorios. Tal certificación implica habitualmente contar con un número de laboratorios independientes, de igual nivel de competencia, que midan las muestras de material, del que se desea certificar una propiedad. Generalmente se supone que las diferencias entre los resultados individuales, tanto inter (entre) laboratorios como intra (dentro) laboratorio, son de naturaleza estadística, sin importar sus causas. La media de cada laboratorio se considera como una estimación no sesgada de la propiedad del material, y la media no ponderada de las medias de los laboratorios se supone habitualmente como la mejor estimación de dicha propiedad.

La certificación de un material de referencia podría implicar *I* laboratorios diferentes, cada uno de ellos midiendo la propiedad en estudio en *J* muestras distintas del material, consistiendo la medición de cada muestra en *K* observaciones repetidas e independientes. El número total de observaciones sería entonces *IJK*, y el númeo total de muestras *IJ*. Éste sería un ejemplo de diseño anidado compensado, de dos niveles, análogo al ejemplo anterior del patrón de tensión de un nivel. En este caso, hay dos niveles de “anidamiento” de las observaciones, con dos factores diferentes, muestra y laboratorio, que varian durante la medición. El modelo es compensado puesto que cada muestra es observada el mismo número (*K*) de veces en cada laboratorio, y cada laboratorio mide el mismo número (*J*) de muestras. Profundizando en la analogía con el ejemplo del patrón de tensión, en el caso del material de referencia el análisis de los datos tiene por objeto investigar la existencia de un posible efecto entre-muestras o entre-laboratorios, y determinar la incertidumbre más conveniente que puede atribuirse a la mejor estimación del valor de la propiedad a certificar. De acuerdo con el apartado anterior, la mejor estimación se supone que es la media de las *I* medias de laboratorios, que es también la media de las *IJK* observaciones.

H.5.3.3 El apartado 3.4.2 puso en evidencia la importancia de hacer variar las magnitudes de entrada, de las que depende el resultado de medida, de forma que su incertidumbre esté basada en datos observados, evaluados estadísticamente. Los diseños anidados y el análisis de los datos resultantes mediante métodos de análisis de la varianza, pueden utilizarse con éxito en la práctica, en numerosas situaciones de medición.

Sin embargo, tal como se indicó en 3.4.1, es poco práctico hacer variar todas las magnitudes de entrada, debido a las limitaciones de tiempo y de recursos existentes; en el mejor de los casos, en la mayoría de las situaciones prácticas de medición, sólo es posible evaluar algunas componentes de la incertidumbre utilizando métodos de análisis de la varianza. Como también se señaló en 4.3.1, muchas componentes deben evaluarse basándose en criterios científicos, utilizando la totalidad de la información disponible sobre la posible variabilidad de las magnitudes de entrada en cuestión; en numerosos casos, una componente de la incertidumbre, como la proveniente de un efecto entre muestras (o entre laboratorios, o entre instrumentos, o entre operadores), no puede evaluarse mediante análisis estadístico de series de observaciones, sino que es necesario evaluarla a partir de todo el conjunto de informaciones disponibles.

H.6 Mediciones respecto a una escala de referencia: dureza

La dureza es un ejemplo de propiedad física que no puede cuantificarse sin hacer referencia a un método de medida; no existe una unidad de dureza independiente de un método dado. La magnitud “dureza” difiere de las magnitudes medibles clásicas en que no puede introducirse en ecuaciones algebraicas para definir otras magnitudes medibles (aunque a veces se utiliza en ecuaciones empíricas que relacionan la dureza con alguna otra propiedad de una categoría de materiales). Su valor viene determinado mediante una medición convencional, la de la dimensión lineal de una huella o impronta realizada sobre un bloque del material de interés o *bloque muestra*. La medición se realiza en conformidad con una norma escrita, que incluye una descripción del dispositivo que realiza la huella, denominado “penetrador”, de la construcción de la máquina de ensayo que permite aplicar el penetrador, y de la forma en que debe utilizarse la máquina. Existen varias normas sobre dureza, de forma que hay varias escalas de dureza.

La dureza obtenida es una función (dependiente de la escala considerada) de la dimensión lineal medida. En el ejemplo incluído en este apartado, se trata de una función lineal de la media aritmética de las profundidades de cinco huellas obtenidas repetidamente, pero en otras escalas, la función no es lineal.

Los patrones nacionales son máquinas patrón realizadas con este fin (no existe una realización patrón internacional); la comparación entre una máquina particular y la *máquina patrón nacional* se hace utilizando un *bloque patrón de transferencia*.

H.6.1 Definición del problema de medición

En este ejemplo se determina la dureza de un bloque muestra de material, en la escala “Rockwell C”, utilizando una máquina que ha sido calibrada respecto a la máquina patrón nacional. La unidad de escala para la dureza Rockwell C es 0,002 mm, definiéndose la dureza en dicha escala como 100 x (0,002 mm) menos la media de las profundidades de cinco huellas, medidas en milímetros. El valor de esta cantidad, dividido por la unidad de escala Rockwell C, 0,002 mm, se denomina “índice de dureza HRC”. En el presente ejemplo, la magnitud se denomina simplemente “dureza”, simbolizándose como $h_{\text{Rockwell C}}$, y el valor numérico de la dureza, expresado en unidades Rockwell de longitud, se denomina “índice de dureza”, simbolizándose como $H_{\text{Rockwell C}}$.

H.6.2 Modelo matemático

Al valor medio de las profundidades de las huellas realizadas en el bloque muestra por la máquina utilizada para determinar su dureza, o *máquina de calibración*, deben añadirse determinadas correcciones, con objeto de obtener el valor medio de las profundidades de las huellas que, sobre el mismo bloque, habrían sido hechas por la máquina patrón nacional. De esta forma

$$h_{\text{RockwellC}} = f(\overline{d}, \Delta_c, \Delta_b, \Delta_S) =$$

$$= 100(0{,}002\,\text{mm}) - \overline{d} - \Delta_c - \Delta_b - \Delta_S \tag{H.33a}$$

$$H_{\text{Rockwell C}} = h_{\text{Rockwell C}} \,/\, (0{,}002\ \text{mm}) \tag{H.33b}$$

donde

$\overline{d}$ es la media aritmética de las profundidades de las cinco huellas hechas por la máquina de calibración sobre el bloque muestra;

Δ_c es la corrección obtenida mediante comparación de la máquina de calibración con la máquina patrón nacional, utilizando un bloque patrón de transferencia, e igual a la media de las profundidades de $5m$ huellas hechas por la máquina patrón nacional sobre el bloque, menos la media de las profundidades de $5n$ huellas hechas sobre el mismo bloque por la máquina de calibración;

Δ_b es la diferencia (supuestamente igual a cero) de dureza (expresada como diferencia de profundidades medias de huella) entre las dos partes de un bloque patrón de transferencia, sobre las que respectivamente se han realizado huellas con las dos máquinas; y

Δ_S es el error debido a la falta de repetibilidad de la máquina patrón nacional y a la definición incompleta de la magnitud dureza. Aunque se supone que Δ_S es igual a cero, existe una incertidumbre típica asociada, igual a $u(\Delta_S)$.

Como las derivadas parciales $\partial f / \partial \overline{d}$, $\partial f / \partial \Delta_c$, $\partial f / \partial \Delta_b$ y $\partial f / \partial \Delta_S$ de la función de la ecuación (H.33a) son todas iguales a -1, la incertidumbre típica combinada $u_c(h)$ de la dureza del bloque muestra, medida por la máquina de calibración, viene dada simplemente por

$$u_c^2(h) = u^2(\overline{d}) + u^2(\Delta_c) + u^2(\Delta_b) + u^2(\Delta_S) \qquad \text{(H.34)}$$

donde, para simplificar la notación, $h \equiv h_{\text{Rockwell C}}$.

H.6.3 Contribución de varianzas

H.6.3.1 Incertidumbre de la profundidad media de huella $\overline{d}$ sobre el bloque muestra, $u(\overline{d})$

Incertidumbre de las observaciones repetidas. La repetición exacta de una observación no es posible puesto que no puede hacerse una nueva huella en el mismo lugar de la precedente. Como cada huella debe hacerse en un emplazamiento distinto, la variación en los resultados incluye el efecto de la variación de dureza entre los distintos emplazamientos. Así, $u(\overline{d})$, incertidumbre típica de la media de las profundidades de cinco huellas realizadas sobre el mismo bloque muestra por la máquina de calibración, se toma igual a $s_p(d_k)/\sqrt{5}$, donde $s_p(d_k)$ es la desviación típica experimental de un conjunto de profundidades determinadas mediante mediciones "repetidas" sobre un bloque que se sabe posee una dureza muy uniforme (véase 4.2.4).

Incertidumbre de la indicación. Aunque la corrección sobre $\overline{d}$ debida a la indicación de la máquina de calibración sea igual a cero, existe una incertidumbre sobre $\overline{d}$ debida a la incertidumbre de la indicación de profundidad, derivada de la propia resolución δ de la indicación, dada por $u^2(\delta) = \delta^2/12$ (véase F.2.2.1). La varianza estimada de $\overline{d}$ es pues

$$u^2(\overline{d}) = s^2(d_k)/5 + \delta^2/12 \qquad \text{(H.35)}$$

H.6.3.2 Incertidumbre de la corrección por diferencia entre las dos máquinas, $u(\Delta_c)$

Como se indicó en H.6.2, Δ_c es la corrección por diferencia entre la máquina patrón nacional y la máquina de calibración. Esta corrección puede expresarse en la forma $\Delta_c = z_s' - z'$, donde $z_S' = (\sum_{i=1}^{m} \overline{z}_{s,i})/m$ es la profundidad media de $5m$ huellas hechas por la máquina patrón nacional sobre el bloque patrón de transferencia, y $z' = (\sum_{i=1}^{n} \overline{z}_i)/n$ es la profundidad media de las $5n$ huellas realizadas por la máquina de calibración sobre el mismo bloque. Suponiendo que, para la comparación, la incertidumbre debida a la resolución de la indicación de cada máquina es despreciable, la varianza estimada Δ_c es

$$u^2(\varDelta_c) = \frac{s_{av}^2(\bar{z}_s)}{m} + \frac{s_{av}^2(\bar{z})}{n} \tag{H.36}$$

donde

$s_{av}^2(\bar{z}_s) = \left[\sum_{i=1}^{m} s^2(\bar{z}_{s,i})\right]/m$ es la media de las varianzas experimentales de las medias de cada una de las m series de huellas $z_{s,ik}$ hechas por la máquina patrón;

$s_{av}^2(\bar{z}) = \left[\sum_{i=1}^{n} s^2(\bar{z}_i)\right]/n$ es la media de las varianzas experimentales de las medias de cada una de las n series de huellas z_{ik} hechas por la máquina de calibración.

NOTA Las varianzas $s_{av}^2(\bar{z}_s)$ y $s_{av}^2(\bar{z})$ son estimaciones sobre conjuntos de datos. Véase la presentación de la ecuación (H.26b) de H.5.2.2.

H.6.3.3 Incertidumbre de la corrección debida a las variaciones de dureza del bloque patrón de transferencia, $u(\varDelta_b)$

La Recomendación Internacional R 12 de la OIML sobre verificación y calibración de bloques normalizados de dureza Rockwell C, exige que las profundidades máxima y mínima obtenidas tras cinco mediciones sobre el bloque patrón de transferencia no difieran en más de una fracción x de la profundidad media, siendo x función del nivel de dureza. Supongamos entonces que la diferencia máxima entre las profundidades de las huellas, en todo el bloque, sea xz', donde z' se define como en H.6.3.2, con $n = 5$. Supongamos también que la diferencia máxima responde a una distribución triangular de probabilidad en torno al valor medio $xz'/2$ (según la hipótesis razonable de que los valores próximos al valor central son más probables que los extremos, véase 4.3.9). Si en la ecuación (9b) de 4.3.9, $a = xz'/2$, entonces la varianza estimada de la corrección de la profundidad media de huella, debida a las diferencias de dureza presentadas respectivamente a la máquina patrón y a la máquina de calibración, es

$$u^2(\varDelta_b) = (xz')^2 / 24 \tag{H.37}$$

Como se indicó en H.6.2, se supone que la mejor estimación de la corrección $\varDelta_b$ es cero.

H.6.3.4 Incertidumbre de la máquina patrón nacional y de la definición de dureza, $u(\varDelta_S)$

La incertidumbre de la máquina patrón nacional, al igual que la debida a la definición incompleta de la magnitud dureza, viene dada en forma de desviación típica estimada $u(\varDelta_S)$ (magnitud cuya dimensión es una *longitud*).

H.6.4 La incertidumbre típica combinada $u_c(h)$

Tomando todos los términos individuales presentados de H.6.3.1 a H.6.3.4 y sustituyéndolos en la ecuación (H.34) se obtiene para la varianza estimada de la medida de dureza

$$u_c^2(h) = \frac{s^2(d_k)}{5} + \frac{\delta^2}{12} + \frac{s_{av}^2(\bar{z}_s)}{m} + \frac{s_{av}^2(\bar{z})}{n} + \frac{(xz')^2}{24} + u^2(\varDelta_S) \tag{H.38}$$

siendo la incertidumbre típica combinada $u_c(h)$.

H.6.5 Ejemplo numérico

Los datos para el presente ejemplo se resumen en la tabla H.10.

Tabla H.10: Resumen de los datos para la determinación de la dureza de un bloque muestra en la escala Rockwell C

Fuente de incertidumbre	Valor
Profundidad media $\overline{d}$ de 5 huellas realizadas por la máquina de calibración sobre el bloque muestra: 0,072 mm	36,0 unidades de escala Rockwell
Índice de dureza del bloque muestra obtenido a partir de 5 huellas: $H_{\text{Rockwell C}} = h_{\text{Rockwell C}}$ / (0,002 mm) = [100 (0,002 mm) – 0,072 mm] / (0,002 mm) (véase H.6.1)	64,0 HRC
Desviación típica experimental $s_p(d_k)$ del conjunto de profundidades realizadas por la máquina de calibración sobre un bloque de dureza uniforme	0,45 unidades de escala Rockwell
Resolución δ de la indicación de la máquina de calibración	0,1 unidades de escala Rockwell
$s_{av}(\overline{z}_S)$, raíz cuadrada de la media de las varianzas experimentales de las medias de m series de huellas hechas por la máquina patrón nacional sobre el bloque patrón de transferencia	0,10 unidades de escala Rockwell, $m = 6$
$s_{av}(\overline{z})$, raíz cuadrada de la media de las varianzas experimentales de las medias de n series de huellas hechas por la máquina de calibración sobre el bloque patrón de transferencia	0,11 unidades de escala Rockwell, $n = 6$
Variación relativa permitida x de la profundidad de penetración, sobre el bloque patrón de transferencia	1,5 x 10^{-2}
Incertidumbre típica $u(\Delta_S)$ de la máquina patrón nacional y de la definición de dureza	0,5 unidades de escala Rockwell

La escala es la Rockwell C, simbolizada por HRC. La unidad de escala Rockwell C es 0,002 mm, lo que significa que en la tabla H.10, y en lo que sigue, “36 unidades de escala Rockwell”, por ejemplo, equivaldrán a 36,0 x (0,002 mm) = 0,072 mm, siendo simplemente una forma cómoda de expresar los datos y los resultados.

Si los valores de las correspondientes magnitudes dadas en la tabla H.10 se llevan a la ecuación (H.38), se obtienen las dos expresiones siguientes:

$$u_c^2(h) = \left[\frac{0{,}45^2}{5} + \frac{0{,}1^2}{12} + \frac{0{,}10^2}{6} + \frac{0{,}11^2}{6} + \frac{(0{,}015 \times 36{,}0)^2}{24} + 0{,}5^2\right] \text{(unidad de escala Rockwell)}^2$$

resultando

$$u^2_c(h) = 0{,}307 \text{ (unidad de escala Rockwell)}^2$$

$$u_c(h) = 0{,}55 \text{ unidades de escala Rockwell} = 0{,}001\ 1 \text{ mm}$$

donde basta con tomar $z' = \overline{d}$ = 36,0 unidades de escala Rockwell para calcular la incertidumbre.

Si se supone $\Delta_c = 0$, la dureza del bloque muestra es entonces

$h_{\text{Rockwell C}}$ = 64,0 unidades de escala Rockwell, ó 0,128 0 mm, con una incertidumbre típica combinada u_c = 0,55 unidades de escala Rockwell, ó 0,001 1 mm.

El índice de dureza del bloque es $h_{\text{Rockwell C}}$/(0,002 mm) = (0,128 0 mm)/(0,002 mm), o

$$H_{\text{Rockwell C}} = 64{,}0 \text{ HRC, con una incertidumbre típica combinada } u_c = 0{,}55 \text{ HRC.}$$

Además de la componente de incertidumbre debida a la máquina patrón nacional y a la definición de dureza, $u(\Delta_S) = 0{,}5$ unidades de escala Rockwell, las componentes significativas de la incertidumbre son la debida a la repetibilidad de la máquina, $s_p(d_k)/\sqrt{5} = 0{,}20$ unidades de escala Rockwell, y la debida a la variación de dureza del bloque patrón de transferencia, esta última igual a $(xz')^2/24 = 0{,}11$ unidades de escala Rockwell. El número efectivo de grados de libertad de u_c puede calcularse utilizando la fórmula de Welch-Satterthwaite, en la forma indicada en H.1.6.

Anexo J ∗

Glosario de los principales símbolos

a	Semi-amplitud de una distribución rectangular de posibles valores de una magnitud de entrada X_i: $a = (a_+ - a_-)/2$
a_+	Límite superior de una magnitud de entrada X_i
a_-	Límite inferior de una magnitud de entrada X_i
b_+	Límite superior de la desviación de una magnitud de entrada X_i respecto a su estimación x_i: $b_+ = a_+ - x_i$
b_-	Límite inferior de la desviación de una magnitud de entrada X_i respecto a su estimación x_i: $b_- = x_i - a_-$
c_i	Derivada parcial o coeficiente de sensibilidad: $c_i \equiv \partial f/\partial x_i$
f	Relación funcional entre un mensurando Y y las magnitudes de entrada X_i de las que depende Y, y entre la estimación de salida y (estimación del mensurando) y las estimaciones de entrada x_i de las que depende y
$\partial f/\partial x_i$	Derivada parcial respecto a una magnitud de entrada X_i, de la relación funcional f existente entre el mensurando Y y las magnitudes de entrada X_i de las que depende éste, evaluada para las estimaciones x_i de X_i: $\partial f/\partial x_i = \partial f/\partial X_i \big|_{x_1, x_2, ..., x_N}$
k	Factor de cobertura utilizado para calcular la incertidumbre expandida $U = ku_c(y)$ de una estimación de salida y (estimación del mensurando), a partir de su incertidumbre típica combinada $u_c(y)$, donde U define un intervalo $Y = y \pm U$ con un alto nivel de confianza
k_p	Factor de cobertura utilizado para calcular la incertidumbre expandida $U_p = k_p u_c(y)$ de una estimación de salida y (estimación del mensurando), a partir de su incertidumbre típica combinada $u_c(y)$, donde U_p define un intervalo $Y = y \pm U_p$ con un alto nivel de confianza específico p
n	Número de observaciones repetidas
N	Número de magnitudes de entrada X_i de las que depende un mensurando Y
p	Probabilidad; nivel de confianza: $0 \leq p \leq 1$
q	Magnitud que varía aleatoriamente, descrita mediante una distribución de probabilidad

∗ **Nota a la versión del 2008**
Cuando la GUM se publicó por primera vez, estaba en vigor una regla editorial que prohibía el uso de un Anexo I. Esa es la razón por la que los anexos pasan del H al J.

$\overline{q}$	Media aritmética de n observaciones repetidas e independientes q_k de una magnitud q que varía aleatoriamente
	Estimación de la esperanza matemática o de la media μ_q de la distribución de probabilidad de q
q_k	k-ésima observación repetida e independiente de una magnitud q que varía aleatoriamente
$r(x_i, x_j)$	Coeficiente de correlación estimado, asociado a x_i y x_j, valores estimados de las magnitudes de entrada X_i y X_j: $r(x_i,x_j) = u(x_i,x_j)/[u(x_i)u(x_j)]$
$r(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$	Coeficiente de correlación estimado de las medias de entrada $\overline{X}_i$ y $\overline{X}_j$, determinadas a partir de n pares independientes de observaciones simultáneas y repetidas $X_{i,k}$ y $X_{j,k}$ de X_i y X_j: $r(\overline{X}_i,\overline{X}_j)=s(\overline{X}_i,\overline{X}_j)/[s(\overline{X}_i)s(\overline{X}_j)]$
$r(y_i, y_j)$	Coeficiente de correlación estimado, asociado a las estimaciones de salida y_i e y_j, cuando se determinan dos o más mensurandos o magnitudes de salida en la misma medición
s_p^2	Estimación de la varianza a partir de un conjunto de datos
s_p	Desviación típica experimental estimada a partir de un conjunto de datos, igual a la raíz cuadrada positiva de s_p^2
$s^2(\overline{q})$	Varianza experimental de la media $\overline{q}$
	Estimación de la varianza σ^2/n de $\overline{q}$: $s^2(\overline{q}) = s^2(q_k)/n$
	Varianza estimada obtenida mediante evaluación Tipo A
$s(\overline{q})$	Desviación típica experimental de la media $\overline{q}$, igual a la raíz cuadrada positiva de $s^2(\overline{q})$
	Estimador sesgado de $\sigma(\overline{q})$ (véase nota de C.2.21)
	Incertidumbre típica obtenida mediante evaluación Tipo A
$s^2(q_k)$	Varianza experimental determinada a partir de n observaciones repetidas e independientes q_k de q
	Estimación de la varianza σ^2 de la distribución de probabilidad de q
$s(q_k)$	Desviación típica experimental, igual a la raíz cuadrada positiva de $s^2(q_k)$
	Estimador sesgado de la desviación típica σ de la distribución de probabilidad de q
$s^2(\overline{X}_i)$	Varianza experimental de la media de entrada $\overline{X}_i$, determinada a partir de n observaciones repetidas e independientes $X_{i,k}$ de X_i
	Varianza estimada obtenida mediante evaluación Tipo A
$s(\overline{X}_i)$	Desviación típica experimental de la media de entrada $\overline{X}_i$, igual a la raíz cuadrada positiva de $s^2(\overline{X}_i)$

	Incertidumbre típica obtenida mediante evaluación Tipo A
$s(\overline{q},\overline{r})$	Covarianza estimada obtenida mediante evaluación Tipo A simultáneas repetidas q_k y r_k, de q y r
	Estimación de la covarianza de las medias $\overline{q}$ y $\overline{r}$ que estiman las esperanzas matemáticas μ_q y μ_r de las dos magnitudes q y r, que varían aleatoriamente, determinadas a partir de n pares independientes de observaciones
$s(\overline{X}_i,\overline{X}_j)$	Estimación de la covarianza de las medias de entrada $\overline{X}_i$ y $\overline{X}_j$, determinadas a partir de n pares independientes de observaciones simultáneas repetidas $X_{i,k}$ y $X_{j,k}$, de X_i y X_j
	Covarianza estimada obtenida mediante evaluación Tipo A
$t_p(\nu)$	Factor t de la distribución t de Student, para ν grados de libertad, correspondiente a una probabilidad dada p
$t_p(\nu_{eff})$	Factor t de la distribución t de Student, para ν_{eff} grados efectivos de libertad, correspondiente a una probabilidad dada p, utilizado para calcular una incertidumbre expandida U_p
$u^2(x_i)$	Varianza estimada asociada a la estimación x_i de la magnitud de entrada X_i NOTA Cuando x_i se determina a partir de la media aritmética de n observaciones repetidas e independientes, $u^2(x_i)=s^2(\overline{X}_i)$ es una estimación de la varianza obtenida mediante evaluación Tipo A
$u(x_i)$	Incertidumbre típica de la estimación x_i de la magnitud de entrada X_i, igual a la raíz cuadrada positiva de $u^2(x_i)$ NOTA Cuando x_i se determina a partir de la media de n observaciones repetidas e independientes, $u(x_i)=s(\overline{X}_i)$ es una incertidumbre típica obtenida mediante evaluación Tipo A
$u(x_i,x_j)$	Covarianza estimada asociada a dos estimaciones x_i y x_j de las magnitudes de entrada X_i y X_j NOTA Cuando x_i y x_j se determinan a partir de n pares de observaciones simultáneas repetidas e independientes, $u(x_i,x_j)=s(\overline{X}_i,\overline{X}_j)$ es una covarianza estimada obtenida mediante evaluación Tipo A
$u_c^2(y)$	Varianza combinada asociada a una estimación de salida y
$u_c(y)$	Incertidumbre típica combinada de una estimación de salida y, igual a la raíz cuadrada positiva de $u_c^2(y)$
$u_{cA}(y)$	Incertidumbre típica combinada de una estimación de salida y, determinada a partir de incertidumbres típicas y covarianzas estimadas, obtenidas únicamente a partir de evaluaciones Tipo A
$u_{cB}(y)$	Incertidumbre típica combinada de una estimación de salida y, determinada a partir de incertidumbres típicas y covarianzas estimadas, obtenidas únicamente a partir de evaluaciones Tipo B
$u_c(y_i)$	Incertidumbre típica combinada de una estimación de salida y_i, cuando se determinan dos o más mensurandos o magnitudes de salida en la misma medición
$u_i^2(y)$	Componente de la varianza combinada $u_c^2(y)$ asociada a la estimación y de salida, procedente de la varianza estimada $u^2(x_i)$ asociada a la estimación de entrada x_i: $u_i^2(y)\equiv\left[c_i u(x_i)\right]^2$

$u_i(y)$	Componente de la incertidumbre típica combinada $u_c(y)$ de la estimación y de salida, procedente de la incertidumbre típica de la estimación de entrada x_i: $u_i(y) \equiv \lvert c_i \rvert u(x_i)$
$u(y_i,y_j)$	Covarianza estimada asociada a las estimaciones de salida y_i e y_j, determinadas en la misma medición
$u(x_i)/\lvert x_i \rvert$	Incertidumbre típica relativa de la estimación de entrada x_i
$u_c(y)/\lvert y \rvert$	Incertidumbre típica combinada relativa de la estimación de salida y
$[u(x_i)/x_i]^2$	Varianza relativa estimada asociada a la estimación de entrada x_i
$[u_c(y)/y]^2$	Varianza combinada relativa asociada a la estimación de salida y
$\dfrac{u(x_i, x_j)}{\lvert x_i x_j \rvert}$	Covarianza relativa estimada asociada a las estimaciones de entrada x_i y x_j
U	Incertidumbre expandida de la estimación de salida y que define un intervalo $Y = y \pm U$ con un alto nivel de confianza, igual al producto del factor de cobertura k por la incertidumbre típica combinada $u_c(y)$ de y: $U = ku_c(y)$
U_p	Incertidumbre expandida de la estimación de salida y que define un intervalo $Y = y \pm U_p$ con un alto nivel de confianza específico p, igual al producto del factor de cobertura k_p por la incertidumbre típica combinada $u_c(y)$ de y: $U_p = k_p u_c(y)$
x_i	Estimación de la magnitud de entrada X_i NOTA Cuando x_i se determina a partir de la media aritmética de n observaciones repetidas e independientes, $x_i = \overline{X}_i$
X_i	i-ésima mágnitud de entrada de la que depende el mensurando Y NOTA X_i puede ser la magnitud física o la variable aleatoria (véase nota 1 de 4.1.1)
$\overline{X}_i$	Estimación del valor de la magnitud de entrada X_i, igual a la media aritmética de n observaciones repetidas e independientes $X_{i,k}$ de X_i
$X_{i,k}$	k-ésima observación repetida e independiente de X_i
y	Estimación del mensurando Y
	Resultado de una medición
	Estimación de salida
y_i	Estimación del mensurando Y_i cuando se determinan dos o más mensurandos en la misma medición
Y	Un mensurando

$\dfrac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}$	Incertidumbre relativa estimada de la incertidumbre típica $u(x_i)$ de la estimación de entrada x_i
μ_q	Esperanza matemática o media de la distribución de probabilidad de una magnitud q que varía aleatoriamente
ν	Grados de libertad (en general)
ν_i	Grados de libertad o grados de libertad efectivos de la incertidumbre típica $u(x_i)$ de una estimación de entrada x_i
ν_{eff}	Grados efectivos de libertad de $u_c(y)$, utilizados para obtener $t_p(\nu_{\mathrm{eff}})$ y calcular la incertidumbre expandida U_p
ν_{effA}	Grados efectivos de libertad de una incertidumbre típica combinada, determinados a partir de incertidumbres típicas obtenidas únicamente mediante evaluaciones Tipo A
ν_{effB}	Grados efectivos de libertad de una incertidumbre típica combinada, determinados a partir de incertidumbres típicas obtenidas únicamente mediante evaluaciones Tipo B
σ^2	Varianza de una distribución de probabilidad, por ejemplo de una magnitud q que varía aleatoriamente, estimada mediante $s^2(q_k)$
σ	Desviación típica de una distribución de probabilidad, igual a la raíz cuadrada positiva de σ^2
	$s(q_k)$ es un estimador sesgado de σ
$\sigma^2(\overline{q})$	Varianza de $\overline{q}$, igual a σ^2/n, estimada mediante $s^2(\overline{q}) = s^2(q_k)/n$
$\sigma(\overline{q})$	Desviación típica de $\overline{q}$, igual a la raíz cuadrada positiva de $\sigma^2(\overline{q})$
	$s(\overline{q})$ es un estimador sesgado de $\sigma(\overline{q})$
$\sigma^2[s(\overline{q})]$	Varianza de la desviación típica experimental $s(\overline{q})$ de $\overline{q}$
$\sigma[s(\overline{q})]$	Desviación típica de la desviación típica experimental $s(\overline{q})$ de $\overline{q}$, igual a la raíz cuadrada positiva de $\sigma^2[s(\overline{q})]$

Anexo K

Bibliografía

[1] CIPM (1980), *BIPM Proc.-verb. Com. int. poids et mesures* **48**, C1-C30 (en francés); BIPM (1980), Rapport BIPM-80/3, *Report on the BIPM enquiry on error statements*, Bur. int. poids et mesures (Sèvres, France) (en inglés).

[2] KAARLS, R. (1981), *BIPM Proc.-verb. Com. int. poids et mesures* **49**, A1-A12 (en francés); Giacomo, P. (1981), *Metrologia* **17**, 73-74 (en inglés).

NOTA - La traducción al inglés de la Recomendación INC-1 (1980), cuya versión en español se presenta en el apartado 0.7 de esta *Guía*, se hizo a partir de la versión final de la Recomendación y fue tomada de un informe interno del BIPM. Dicha traducción está de acuerdo con el texto autorizado en francés de la Recomendación, dado en *BIPM Proc.-verb. Com. int. poids et mesures* **49** y reproducido en A.1, dentro del anexo A de la presente *Guía*. La versión inglesa de la Recomendación INC-1 (1980) que aparece en *Metrologia* **17** se hizo a partir de un borrador, difiriendo ligeramente de la traducción dada en el informe interno del BIPM y, en consecuencia, de la incluida en 0.7.

[3] CIPM (1981), *BIPM Proc.-verb. Com. int. poids et mesures* **49**, 8-9, 26 (en francés); Giacomo, P. (1982), *Metrologia* **18**, 43-44 (en inglés).

[4] CIPM (1986), *BIPM Proc.-verb. Com. int. poids et mesures* **54**, 14, 35 (en francés); Giacomo, P. (1987), *Metrologia* **24**, 49-50 (en inglés).

[5] *ISO 5725: 1986, Precision of test methods — Determination of repeatability and reproducibility for a standard test method by inter-laboratory tests*, Organización Internacional de Normalización (Ginebra, Suiza)

NOTA - Esta norma se está revisando actualmente[3]. La revisión tiene un nuevo título "Accuracy (trueness and precision) of measurement methods and results", y se compone de seis partes.

[6] *International vocabulary of basic and general terms in metrology,* segunda edición, 1993,[4] Organización Internacional de Normalización (Ginebra, Suiza)

El título abreviado de este vocabulario es VIM.

NOTA 1 Las definiciones de los términos dados en el Anexo B provienen del texto revisado en inglés en su forma final antes de su publicación.

[3] **Nota a la versión del 2008**
La ISO 5725:1986 ha sido reemplazada por una serie que consta de seis partes. La ISO 5725 está formada por las siguientes partes bajo el título general de *Accuracy (trueness and precision) of measurement methods and results* (Exactitud (veracidad y precisión) de métodos y resultados de medida):
Part 1: General principles and definitions (Parte 1: Principios generales y definiciones)
Part 2: Basic method for the determination of repeatability and reproducibility of a standard measurement method (Parte 2 : Método básico para la determinación de repetibilidad y reproducibilidad del método de medida de un patrón)
Part 3: Intermediate measures of the precision of a standard measurement method (Parte 3: Medidas intermedias de la precisión del método de medida de un patrón)
Part 4: Basic methods for the determination of the trueness of a standard measurement method (Parte 4: Métodos básicos para la determinación de la veracidad del método de medida de un patrón)
Part 5: Alternative methods for the determination of the precision of a standard measurement method (Parte 5: Métodos alternatives para la determinación de la precisión del método de medida de un patrón)

[4] **Nota a la versión del 2008**
La tercera edición del vocabulario se publicó en 2008 bajo el título JCGM 200:2008, *International vocabulary of metrology — Basic and general concepts and associated terms (VIM).*

Nota a la edición en español
La edición en español se titula *"Vocabulario Internacional de Metrología. Conceptos fundamentales y generales y términos asociados (VIM)"* y se publicó en 2008.

NOTA 2 La segunda edición del VIM fue publicada por la Organización Internacional de Normalización (ISO), en nombre de las siete organizaciones siguientes, que participaron en los trabajos del Grupo Técnico Consultivo nº 4 de la ISO (TAG 4), grupo que se encargó de la preparación del VIM: el Bureau Internacional de Pesas y Medidas (BIPM), la Comision Electrotécnica Internacional (IEC), la Federación Internacional de Química Clínica (FICC), la ISO, la Unión Internacional de Química Pura y Aplicada (IUPAC), la Unión Internacional de Física Pura y Aplicada (IUPAP) y la Organización Internacional de Metrología Legal (OIML).

NOTA 3 La primera edición del VIM fue publicada por la ISO en 1984, en nombre del BIPM, de la IEC, de la ISO y de la OIML.

[7] ISO 3534-1:[5] 1993, *Statistics — Vocabulary and symbols — Part 1: Probability and general statistical terms,* Organización Internacional de Normalización (Ginebra, Suiza)

[8] FULLER, W. A. (1987), *Measurement error models*, John Wiley (New York, N. Y.).

[9] ALLAN, D. W. (1987), *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **IM-36**, 646-654.

[10] DIETRICH, C. F. (1991), *Uncertainty, calibration and probability*, 2ª edición, Adam-Hilger (Bristol).

[11] MÜLLER, J. W. (1979), *Nucl. Instrum. Meth.* **163**, 241-251.

[12] MÜLLER, J. W. (1984), en *Precision measurement and fundamental constants II*, Taylor, B. N., y Phillips, W. D., eds., Natl. Bur. Stand. (U. S.) Spec. Publ. 617, US GPO (Washington, D. C.), 375-381.

[13] JEFFREYS, H. (1983), *Theory of probability*, 3ª edición, Oxford University Press (Oxford).

[14] PRESS, S.J. (1989), *Bayesian statistics: principles, models, and applications*, John Wiley (New York, N.Y.)

[15] BOX, G.E.P., HUNTER, W.G., and HUNTER, J.S. (1978), *Statistics for experimenters*, John Wiley (New York, N.Y.)

[16] WELCH, B.L. (1936), *J. R. Stat. Soc. Suppl.* **3**, 29-48; (1938), *Biometrika* **29**, 350-362; (1947), *ibid.* **34**, 28-35

[17] FAIRFIELD-SMITH, H. (1936), *J. Counc. Sci. Indust. Res.* (Australia) **9**(3), 211

[18] SATTERTHWAITE, F.E. (1941), *Psychometrika* **6**, 309-316; (1946) *Biometrics Bull.* **2**(6), 110-114

[19] ISO Guide 35:1989, [6] *Certification of reference materials — General and statistical principles*, second edition, Organización Internacional de Normalización (Ginebra, Suiza)

[20] BARKER, T.B. (1985), *Quality by experimental design*, Marcel Dekker (New York, N.Y.)

[5] **Nota a la versión del 2008**
La ISO 3534-1:2006 cancela y emplaza a la ISO 3534-1:1993. Observe que se han revisado algunos de los términos y definiciones. Para más información vea la última edición.

[6] **Nota a la versión del 2008**
La ISO Guide 35:2006 cancela y emplaza a la ISO Guide 35:1989. Para más información vea la última edición.

Índice alfabético

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

L

M

N

O

P

R

S

T

U

V

W

Este documento ha sido elaborado tambien en papel Igloo offset (reciclado extra blanco Torras), libre de cloro.

El Centro Español de Metrología cumple, comprometido con el medio ambiente, su programa de Gestión Ambiental y lo dispuesto en el Plan de Contratación Pública Verde de la Administración del Estado (Orden PRE/116/2008)

El Centro Español de Metrología ha obtenido la certificación ISO 14001.

CENTRO ESPAÑOL DE METROLOGÍA

C/ Del Alfar, 2
28760 Tres Cantos
Madrid
España

Teléfono: 91 807 47 00
Fax: 91 807 48 07
Correo electrónico: cem@cem.es
Internet: http://www.cem.es

NIPO EDICIÓN DIGITAL 1: 706-10- 001- 0

