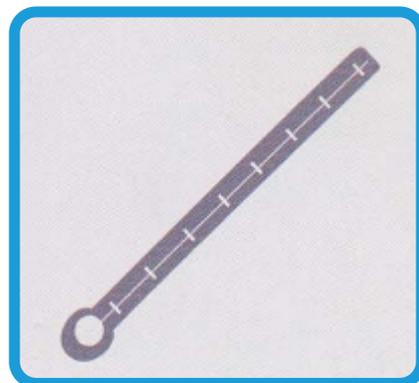
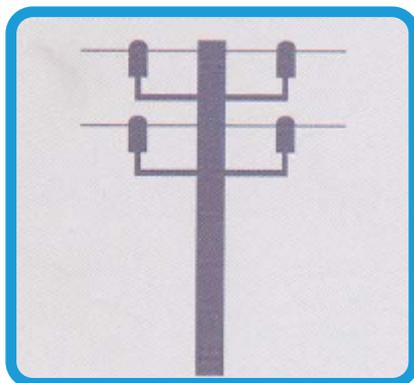
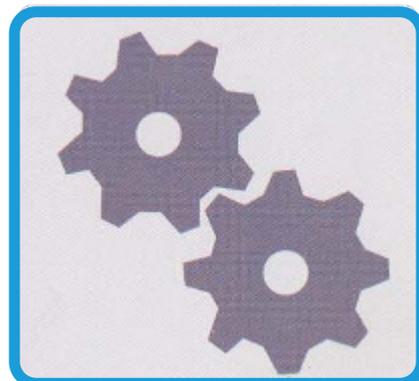
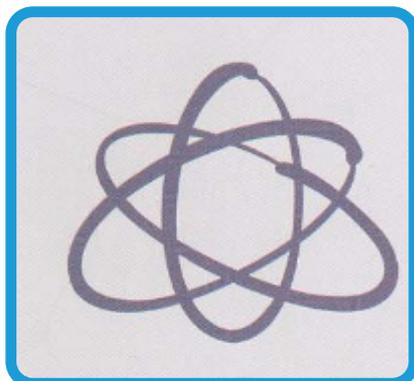
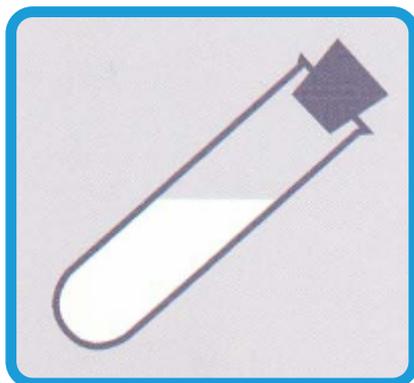


Metrología



PROCEDIMIENTO DI-034 PARA LA
CALIBRACIÓN DE TEODOLITOS

m 22

PROCEDIMIENTO DI-034

CALIBRACIÓN DE TEODOLITOS

Rev. 1, 2022

La presente edición de este procedimiento se emite exclusivamente en formato digital y puede descargarse gratuitamente de nuestra página web (www.cem.es).

Los procedimientos editados por el CEM presentan modelos de calibración, en línea con documentos clave universales como son el Sistema Internacional de unidades (SI), el Vocabulario internacional de metrología (VIM) o la Guía para la expresión de la incertidumbre de medida (GUM). Como modelos que son, los usuarios de los mismos pueden, bajo su responsabilidad, modificarlos para adecuarlos a sus necesidades específicas (instrumentación, condiciones ambientales, etc.). En tal caso, siempre deberá primar el sentido crítico y la ética profesional.

El CEM no acepta ninguna responsabilidad derivada de la interpretación y/o uso de este procedimiento.

El CEM no mantiene correspondencia sobre el contenido de los procedimientos.

ÍNDICE

	Página
1. OBJETO	3
2. ALCANCE	3
3. DEFINICIONES.....	3
4. GENERALIDADES	5
4.1. Notación	7
5. DESCRIPCIÓN.....	8
5.1. Equipos y materiales.....	8
5.2. Operaciones previas	9
5.3. Proceso de calibración.....	10
5.4. Toma y tratamiento de datos	11
6. RESULTADOS	16
6.1. Cálculo de incertidumbres.....	16
6.2. Interpretación de resultados	17
7. REFERENCIAS.....	18
8. ANEXOS	18
8.1. Anexo 1.....	18
8.2. Anexo 2.....	22

1. OBJETO

El presente procedimiento tiene por objeto presentar un método para la calibración de teodolitos.

2. ALCANCE

El presente procedimiento es de aplicación a teodolitos y taquímetros, en estos últimos exclusivamente en la medida angular.

3. DEFINICIONES

Alidada horizontal

Parte móvil del teodolito que gira alrededor del eje principal.

Ángulo horizontal (Ángulo acimutal)

Ángulo medido en el plano horizontal. El ángulo horizontal entre dos puntos se obtiene mediante la diferencia de las lecturas correspondientes a sus direcciones horizontales.

Ángulo vertical

Ángulo medido en el plano vertical. Cuando la dirección de referencia es la dirección que une el punto principal del instrumento con el cenit, al ángulo vertical medido se le denomina ángulo cenital o distancia cenital.

Colimador

Instrumento óptico que consta de una lente convergente y de un retículo con forma de cruz situado sobre el plano focal, de forma que los rayos provenientes del retículo que atraviesan la lente emergen en forma de líneas paralelas.

Eje de colimación

Línea definida por el punto focal del objetivo del telescopio y el punto observado materializado por el centro del retículo.

Eje principal

Eje vertical del teodolito sobre el que gira la alidada para obtener ángulos horizontales.

Eje secundario

Eje horizontal del teodolito sobre el que gira el telescopio para obtener ángulos verticales. Al eje secundario también se le denomina eje de muñones.

Goniómetro

Instrumento que sirve para medir ángulos.

Graduación (unidades angulares)

Los círculos graduados (limbos) utilizados en los teodolitos están habitualmente graduados en gon (grado centesimal), habiendo sustituido esta unidad al grado (sexagesimal) utilizado ampliamente en el pasado. La relación entre el gon y la unidad de ángulo plano del Sistema Internacional es:

$$1 \text{ gon} = \frac{\pi}{200} \text{ rad}$$

Las dos definiciones que figuran a continuación hacen mención al término incertidumbre. La primera es la definición formal, la segunda acepción es la correspondiente a la incertidumbre obtenida en este procedimiento de calibración.

Incertidumbre (de medida) [2] (2.2.3)

Parámetro asociado al resultado de una medición, que caracteriza la dispersión de valores que podrían ser razonablemente atribuidos al mensurando.

NOTA 1 El parámetro puede ser, por ejemplo, una desviación típica (o un múltiplo de ésta), o la semiapertura de un intervalo con un nivel de confianza determinado.

NOTA 2 La incertidumbre de medida comprende, en general, varias componentes. Algunas pueden ser evaluadas a partir de la distribución estadística de los resultados de series de mediciones y pueden caracterizarse por sus desviaciones típicas experimentales. Las otras componentes, que también pueden ser caracterizadas por desviaciones típicas, se evalúan asumiendo distribuciones de probabilidad, basadas en la experiencia o en otras informaciones.

NOTA 3 Se entiende que el resultado de la medición es la mejor estimación del valor del mensurando, y que todas las componentes de la incertidumbre, comprendidas las que provienen de efectos sistemáticos, tales como las asociadas a correcciones y a patrones de referencia, contribuyen a la dispersión.

Medida materializada de longitud

Instrumento destinado a reproducir o a proporcionar, de una manera permanente durante su utilización, uno o varios valores conocidos de la magnitud longitud. Para ello, llevan trazos o marcas de referencia, estando indicadas las distancias entre ellas en unidades legales de longitud. Las referencias principales son las dos marcas de referencia, cuya distancia de separación representa la «longitud nominal» de la medida de longitud.

Las miras de invar son medidas materializadas de longitud empleadas en nivelación topográfica de alta exactitud. Al tener la banda graduada (o codificada) de invar, se minimiza la dilatación producida por los cambios de temperatura.

Medidor electrónico de distancias (MED)

Instrumento para la medida directa de distancias, usualmente por conteo de ondas y comparación de fase entre la onda emitida y recibida.

Posición de observación I

Posición del teodolito para la que a una visual horizontal le corresponde un ángulo cenital de 100 gon.

Posición de observación II

Posición del teodolito para la que a una visual horizontal le corresponde un ángulo cenital de 300 gon.

Punto principal

Punto de intersección entre los ejes del teodolito (eje principal, eje secundario y eje de colimación).

Repetibilidad [1] (adaptado de 2.15 y 2.21)

Precisión de medida (proximidad entre las indicaciones o los valores medidos obtenidos en mediciones repetidas de un mismo objeto, o de objetos similares), bajo condiciones de repetibilidad.

NOTAS

1. Las condiciones de repetibilidad comprenden:
 - El mismo procedimiento de medida.
 - El mismo observador.
 - El mismo instrumento de medida, utilizado bajo las mismas condiciones.
 - El mismo lugar.
 - Repetición durante un corto periodo de tiempo.
2. Es habitual expresar numéricamente la repetibilidad mediante medidas de dispersión tales como la desviación típica, la varianza o el coeficiente de variación bajo las condiciones especificadas.

Taquímetro

Teodolito que permite la medida de distancias por métodos estadimétricos. Para ello dispone de dos hilos paralelos en el retículo denominados hilos estadimétricos. La resolución angular de un taquímetro suele ser inferior a la de un teodolito.

Taquímetro electrónico (estación total)

Taquímetro equipado con un medidor electrónico de distancias (MED), que permite la medida de distancias a lo largo de la línea de puntería. También dispone de funciones incorporadas para facilitar el uso del instrumento (grabación de datos, cálculo de coordenadas,...).

Teodolito

Goniómetro que permite la medida de ángulos horizontales y verticales. La puntería se realiza utilizando un telescopio con un retículo acoplado. El telescopio bascula sobre dos ejes (eje principal y eje secundario) que intersectan ortogonalmente. El instrumento puede ser nivelado con exactitud, de forma que el eje principal adopte la posición vertical.

4. GENERALIDADES

La calibración de los ángulos horizontales se basa en el método de cierre angular. La suma de los ángulos horizontales medidos en una serie de punterías, tras completar el círculo, es 2π radianes (400 gon), lo que equivale a decir que la suma de los errores acumulados es 0. En este procedimiento se miden estos ángulos en diferentes partes del círculo graduado, realizándose un análisis estadístico de las diferentes series de medidas.

Para la medida de ángulos horizontales en diferentes partes del círculo graduado es necesario el cambio del origen angular. Este giro se realiza dependiendo del sistema de lectura de los ángulos horizontales del teodolito:

- Instrumentos con sistema óptico de lectura que permiten girar el círculo graduado sin modificar la línea de puntería (instrumentos repetidores y reiteradores).
- Instrumentos con sistema de lectura digital que disponen de codificadores (encoders) angulares absolutos y permiten girar el círculo graduado para cambiar el origen de medida sin modificar la línea de puntería.
- Instrumentos con sistema de lectura digital que disponen de codificadores (encoders) angulares incrementales, que aunque permiten variar la lectura angular a un punto, realizan este proceso sin girar el círculo graduado.

En los dos primeros casos pueden utilizarse para la medida de ángulos horizontales placas de puntería, como retículos de vidrio con diferentes tipos de señales, ya que el cambio del origen angular no supone mover el instrumento, por lo que no varía su punto principal.

En el tercer caso es necesario girar el instrumento para poder cambiar el origen angular de las medidas, por lo que es muy difícil evitar excentricidades que introduzcan errores en la medida de ángulos a las placas de puntería en las diferentes series.

En este último caso la utilización de colimadores como punterías es imprescindible y muy recomendable, en general, para garantizar punterías óptimas y evitar excentricidades. En la figura 1 se observa como una pequeña excentricidad (P-P') en la posición del teodolito, no influye en la medida de los ángulos entre los colimadores. $\alpha = \alpha'$ $\beta = \beta'$ $\gamma = \gamma'$.

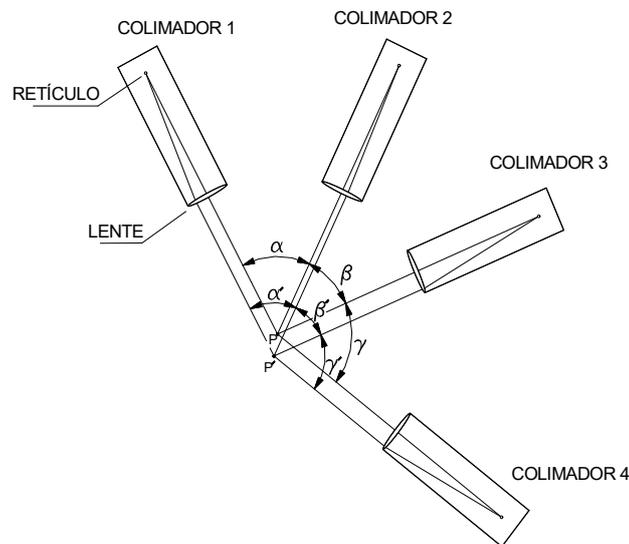


Figura 1. Vista en planta de colimadores dispuestos horizontalmente

Una de las mayores contribuciones a la incertidumbre en la medida de ángulos horizontales con un teodolito proviene del estacionamiento del instrumento sobre un punto determinado. Por ello en topografía industrial de gran exactitud se emplean métodos de medida que evitan el citado estacionamiento sobre la vertical de una señal. Los teodolitos utilizados en estas operaciones suelen carecer de plomadas ópticas, al no ser de utilidad.

En este procedimiento de calibración no se considera pues la contribución a la incertidumbre debida al estacionamiento del teodolito sobre un punto determinado.

La calibración de los ángulos verticales se realiza mediante la puntería a diferentes trazos de una medida materializada de longitud dispuesta en posición vertical. Puede emplearse una mira de invar de 3 metros como las utilizadas en nivelación de alta exactitud. La distancia aproximada entre el teodolito y la medida de longitud (ver figura 2) es la siguiente:

- Para teodolitos de 1 mgon de resolución. $X_2 =$ de 2 a 8 m
- Para teodolitos de 0,3 mgon de resolución. $X_2 =$ de 8 a 14 m

La incertidumbre de calibración de la medida materializada de longitud a la distancia del ensayo debe generar un valor angular al menos de un orden inferior a la resolución del teodolito.

4.1 Notación

Notación	Descripción
m	Número total de series de medidas
n	Número total de vueltas (ángulos horizontales) Número total de trazos (ángulos verticales)
I-II	Posición I o II del teodolito
i	Número de serie de medidas
j	Número de vuelta (ángulos horizontales)
k	Número de colimador (ángulos horizontales) Número de trazo (ángulos verticales)
$X_{j,k,I}$	Dirección horizontal correspondiente a la j-ésima vuelta, k-ésimo colimador, observado en la posición I
$X_{j,k,II}$	Dirección horizontal correspondiente a la j-ésima vuelta, k-ésimo colimador, observado en la posición II
$X_{j,k}$	Valor medio de las medidas realizadas en las dos posiciones del teodolito para cada dirección, correspondiente a la j-ésima vuelta, k-ésimo colimador
$X'_{j,k}$	Valor reducido a la dirección del colimador 1, correspondiente a la j-ésima vuelta, k-ésimo colimador
\bar{X}_k	Valor medio de las medidas de las cuatro vueltas para cada dirección, correspondiente al colimador k
$d_{j,k}$	Diferencia entre cada dirección y la media, correspondiente a la j-ésima vuelta, k-ésimo colimador
\bar{d}_j	Valor medio de las diferencias, correspondiente a la j-ésima vuelta
$r_{j,k}$	Residuo correspondiente a la j-ésima vuelta, k-ésimo colimador (ángulos horizontales)
$S_{i,H}$	Desviación típica de una dirección horizontal observada en ambas posiciones del teodolito para la i-ésima serie
S_H	Desviación típica de una dirección horizontal observada en ambas posiciones del teodolito para las tres series de medidas
α_H	Ángulo horizontal verdadero (dirección)
α_M	Ángulo horizontal medido (dirección)
$c_{v,H}$	Corrección debida a la falta de verticalidad del eje principal
cR	Corrección debida a la resolución del dispositivo visualizador

Notación	Descripción
$Z_{i,k,I}$	Ángulo cenital correspondiente a la i-ésima serie, k-ésimo trazo, observado en la posición I
$Z_{i,k,II}$	Ángulo cenital correspondiente a la i-ésima serie, k-ésimo trazo, observado en la posición II
X_1	Distancia vertical entre el trazo origen de la medida materializada de longitud y la intersección sobre ésta de un plano horizontal que pasa por el punto principal del teodolito. (Ángulos verticales)
X_2	Distancia horizontal entre el punto principal del teodolito y la medida materializada de longitud. (Ángulos verticales)
X_3	Ángulo formado entre la medida materializada de longitud y la vertical. (Ángulos verticales)
h_k	Valor longitudinal correspondiente al trazo k de la medida materializada de longitud (Ángulos verticales)
β	Error de verticalidad del teodolito. (Ángulos verticales)
ρ	$200 \text{ gon}/\pi$ (factor de conversión de rad a gon)
$r_{i,k,I}$	Residuo del modelo de ajuste no lineal correspondiente a la i-ésima serie, k-ésimo trazo, observado en la posición I. (Ángulos verticales)
$r_{i,k,II}$	Residuo del modelo de ajuste no lineal correspondiente a la i-ésima serie, k-ésimo trazo, observado en la posición II. (Ángulos verticales)
$S_{i,V}$	Desviación típica de un ángulo vertical observado en una posición del teodolito para la i-ésima serie
S_I	Desviación típica de un ángulo vertical observado en una posición del teodolito para las cuatro series de medidas
S_V	Desviación típica de un ángulo vertical observado en las dos posiciones del teodolito para las cuatro series de medidas
Z_V	Ángulo cenital verdadero
Z_M	Ángulo cenital medido
$C_{c,V}$	Corrección debida al compensador del círculo vertical

5. DESCRIPCIÓN

5.1. Equipos y materiales

Para la calibración de un teodolito se recomienda la utilización de los siguientes elementos:

- 5.1.1. Conjunto de K colimadores. ($K \geq 3$). En este procedimiento el número de colimadores empleado es 4. Los colimadores, regularmente distribuidos, deben estar situados de forma que sus ejes se encuentren en un mismo plano horizontal. La forma y el grosor del trazo vertical del retículo del colimador no debe introducir incertidumbre al hacer la puntería sobre el mismo. Los retículos deben estar convenientemente iluminados.
- 5.1.2. Mesa o superficie de trabajo sobre la que se puedan situar horizontalmente con total estabilidad los colimadores con sus respectivos soportes.
- 5.1.3. Dispositivo de fijación del teodolito mediante rosca normalizada. Debe permitir situar el teodolito de forma que su punto principal se sitúe en la intersección de los ejes ópticos de los colimadores. Para ello debe disponer de un elemento que permita subir o bajar el teodolito (o los colimadores). También debe permitir el giro de la base del teodolito

sobre su eje principal para cambiar el origen de medida de los ángulos horizontales (cuando proceda). Para evitar variaciones angulares debidas a posibles cambios en el índice de refracción del aire, debe situarse el dispositivo de fijación del teodolito lo más cercano posible al conjunto de colimadores horizontales.

Para la calibración de los ángulos verticales puede utilizarse este dispositivo de fijación o cualquier otro que asegure la estabilidad del teodolito. Por ejemplo un trípode industrial.

- 5.1.4. Una medida materializada de longitud (regla graduada o mira) dispuesta en posición vertical para realizar punterías a los trazos en la medición de los ángulos verticales. La regla debe tener una longitud tal que permita visuales con inclinaciones suficientes a la distancia de enfoque. Puede emplearse una mira de invar de 3 metros como las utilizadas en nivelación de alta exactitud. La medida materializada de longitud debe estar calibrada.
- 5.1.5. Un sistema de iluminación que permita la realización de punterías a la medida materializada de longitud con claridad.
- 5.1.6. Un termómetro para la medida de la temperatura ambiente con incertidumbre $\leq 0,5$ °C.
- 5.1.7. Un higrómetro para la medida de la humedad relativa del aire con incertidumbre ≤ 5 %.
- 5.1.8. Elementos auxiliares para la limpieza de las lentes de los colimadores y del teodolito. Paños suaves, que pueden humedecerse por ejemplo con alcohol.

5.2. Operaciones previas

- 5.2.1. Antes del proceso de calibración debe identificarse el teodolito objeto de la calibración, mediante la marca, el modelo y el número de serie, o de cualquier otra forma que lo identifique unívocamente.
- 5.2.2. El teodolito debe permanecer en la sala donde se realice la calibración un mínimo de 12 horas para adaptarse a las condiciones ambientales existentes, antes de proceder a la calibración. Para una correcta aclimatación debe sacarse de su caja de transporte. Debe tenerse en cuenta cualquier indicación que figure en el manual del teodolito referente al tiempo de estabilización con el equipo conectado antes de su utilización.
- 5.2.3. Los teodolitos son instrumentos adecuados para trabajar en diferentes condiciones atmosféricas, por lo que sus características metrológicas no deben verse afectadas por cambios de temperatura. Sin embargo la experiencia muestra la variación de algunos errores sistemáticos con la variación de las variables atmosféricas, que aunque son eliminados con la metodología de utilización (realización de medidas en ambas posiciones del teodolito), aconsejan la fijación de las condiciones ambientales durante la calibración. La temperatura del recinto donde se realice la calibración debe encontrarse en el intervalo 20 °C \pm 3 °C. La humedad relativa del aire no debe superar el 65%.
- 5.2.4. Las lentes de los colimadores y del teodolito deben estar limpias. La existencia de suciedad en los retículos o en los sistemas ópticos de lectura puede impedir la calibración. El teodolito debe encontrarse en un correcto estado de uso y ajuste. No deben apreciarse dificultades en el giro del telescopio sobre el eje secundario, ni de la alidada alrededor del eje principal.

- 5.2.5. El dispositivo de nivelación del teodolito (nivel tórico de burbuja o nivel electrónico) debe estar correctamente ajustado. Para comprobar el ajuste se gira la alidada 360° , debiendo permanecer nivelado el instrumento durante todo el giro.
- 5.2.6. Para la calibración de los ángulos horizontales se coloca el teodolito en el dispositivo de fijación. Se ajusta la altura, de forma que estando el teodolito nivelado, cuando la lectura vertical del teodolito en la posición I sea 100 gon, el eje óptico del teodolito coincida sensiblemente con el eje del colimador.
- 5.2.7. Para la calibración de los ángulos verticales se coloca el teodolito sobre una superficie estable, puede ser el dispositivo de fijación utilizado con los colimadores, un trípode industrial, o cualquier otro; de forma que quede enfrentado a la medida materializada de longitud, observándose ésta con claridad. La medida materializada de longitud debe estar convenientemente iluminada.
- 5.2.8. Antes de realizar medidas debe enfocarse correctamente el telescopio para eliminar errores de paralaje. Apuntando a una superficie clara se enfoca el retículo girando el ajuste del ocular. Este ajuste no debe moverse en el proceso de medida. A continuación se apunta al retículo del colimador o a los trazos de la medida de longitud y se gira el tornillo de enfoque hasta que esté nítida la imagen.
- 5.2.9. Para evitar posibles errores debidos a un retículo girado (del colimador o del teodolito), debe realizarse la puntería en la intersección de las líneas vertical y horizontal de ambos retículos.

5.3. Proceso de calibración

- 5.3.1. Los ensayos descritos a continuación se realizan en condiciones de repetibilidad.
- 5.3.2. En la calibración de los **ángulos horizontales** se realizan **2 < m < 3 series de medidas (i)**. Cada serie consta de n=4 vueltas (j) a los 4 colimadores (k).

Para cada serie de medidas una dirección se indica como $x_{j,k,I}$ o $x_{j,k,II}$ siendo j el número de vuelta y k el número de colimador. I y II indica la posición del teodolito.

En la posición I del teodolito se observan los ángulos horizontales a los 4 colimadores en sentido horario, en la posición II se observan en sentido antihorario.

La secuencia de medidas de la vuelta j es la siguiente: $x_{j,1,I}, x_{j,2,I}, x_{j,3,I}, x_{j,4,I}, x_{j,4,II}, x_{j,3,II}, x_{j,2,II}, x_{j,1,II}$.

Después de cada vuelta debe variarse el origen del círculo graduado en $+50$ gon. Si no es posible el giro físico del círculo graduado, se girará la base del teodolito, nivelándose de nuevo el instrumento.

- 5.3.3. Para la calibración de los **ángulos verticales** se realizan también **2 < m < 3 series de medidas (i)**. En cada serie de medidas se observan los ángulos verticales de n=6 trazos (k) de la medida materializada de longitud, tres situados preferiblemente por encima de la horizontal del teodolito (lectura en posición I = 100 gon) y tres por debajo.

Un ángulo vertical se indica por $z_{i,k,I}$ o $z_{i,k,II}$, donde el subíndice i indica la serie de medidas y k el trazo. I y II indica la posición del teodolito.

La secuencia de medidas para la serie i es la siguiente:

$Z_{i,1,I}$, $Z_{i,2,I}$, $Z_{i,3,I}$, $Z_{i,4,I}$, $Z_{i,5,I}$, $Z_{i,6,I}$, $Z_{i,6,II}$, $Z_{i,5,II}$, $Z_{i,4,II}$, $Z_{i,3,II}$, $Z_{i,2,II}$ Y $Z_{i,1,II}$

En el cálculo es necesario conocer los valores aproximados de las cuatro incógnitas x_1 , x_2 , x_3 y β (véase figura 2).

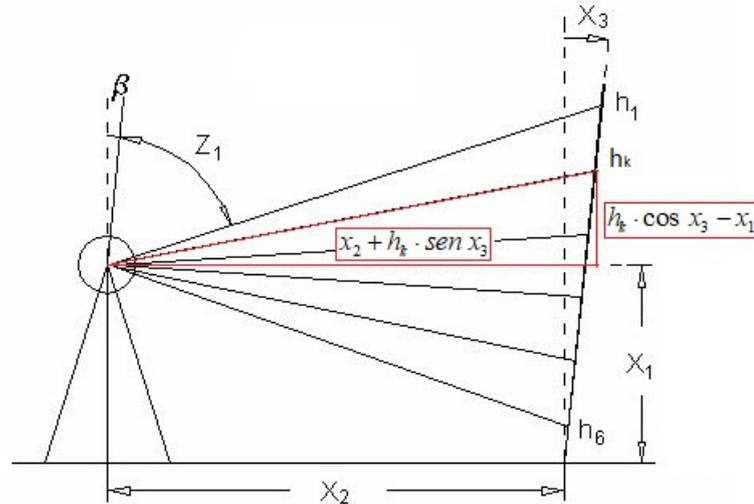


Figura 2. Configuración del ensayo (ángulos verticales)

5.4. Toma y tratamiento de datos

Al comienzo y al final de la calibración deben anotarse las condiciones ambientales (temperatura y humedad).

A continuación figuran los cálculos de los datos obtenidos. [5]

5.4.1. En el tratamiento de los datos obtenidos en la calibración de los ángulos horizontales se evalúa cada serie por separado, para obtener la desviación típica de una dirección observada en ambas posiciones del teodolito.

Todos los valores $x_{j,1,I}$, $x_{j,2,I}$, $x_{j,3,I}$, $x_{j,4,I}$, $x_{j,4,II}$, $x_{j,3,II}$, $x_{j,2,II}$, $x_{j,1,II}$ obtenidos en cada vuelta j , se reducen a la dirección del colimador 1

$$x'_{j,k} = x_{j,k} - x_{j,1} \quad (1)$$

En dicha reducción, si el resultado es negativo, se suman 400 gon, a fin de obtener siempre valores positivos. Esto equivale a girar “virtualmente” el teodolito una vuelta completa, no introduciendo error alguno.

$$x'_{j,k} = (x_{j,k} - x_{j,1}) + 400 \text{ gon} \quad (2)$$

Se obtiene el valor medio de las medidas reducidas realizadas en las dos posiciones del teodolito para cada dirección

$$x'_{j,k} = \frac{x'_{j,k,I} + x'_{j,k,II}}{2} \quad (3)$$

Se obtiene la media de las medidas de las cuatro vueltas para cada dirección.

$$\bar{x}_k = \frac{x'_{1,k} + x'_{2,k} + x'_{3,k} + x'_{4,k}}{4} \quad (4)$$

Se obtiene la diferencia entre la media de las cuatro vueltas y la media de cada vuelta, para cada dirección

$$d_{j,k} = \bar{x}_k - x'_{j,k} \quad (5)$$

así como la media de las diferencias

$$\bar{d}_j = \frac{d_{j,1} + d_{j,2} + d_{j,3} + d_{j,4}}{4} \quad (6)$$

siendo los residuos

$$r_{j,k} = d_{j,k} - \bar{d}_j \quad (7)$$

Como comprobación del cálculo, cada vuelta debe cumplir la siguiente condición (salvo errores de redondeo).

$$\sum_{k=1}^4 r_{j,k} = 0 \quad (8)$$

La suma de los cuadrados de los residuos de la serie i-ésima es:

$$\sum r_i^2 = \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 r_{j,k}^2 \quad (9)$$

La desviación típica de una dirección observada en ambas posiciones del teodolito es:

$$S_{i,H} = \sqrt{\frac{\sum r_i^2}{v_i}} \quad (10)$$

siendo los grados de libertad $v_i = (j-1) \cdot (k-1) = (4-1) \cdot (4-1) = 9$

La desviación típica de una dirección observada en ambas posiciones del teodolito, tras todas las series efectuadas será:

$$S_H = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^4 S_{i,H}^2}{m}}, \text{ siendo } m \text{ el número total de series de medidas (2 o 3),} \quad (11)$$

y siendo el número total de grados de libertad $v = 9 \cdot m$; es decir, 18 o 27, respectivamente

- 5.4.2. En el tratamiento de los datos obtenidos en la calibración de los ángulos verticales se evalúa cada serie por separado, para obtener la desviación típica de un ángulo vertical observado en una posición del teodolito.

El cálculo se realiza conforme al método de mínimos cuadrados.

El modelo de ajuste no lineal es el siguiente:

Para observaciones en la posición I:

$$z_{i,k,I} + \beta + r_{i,k,I} = 100 - \arctan \left(\frac{h_k \cdot \cos x_3 - x_1}{x_2 + h_k \cdot \sin x_3} \right) \quad (12)$$

donde $r_{i,k,I}$ son los residuos del ajuste en la posición I

Para observaciones en la posición II:

$$z_{i,k,II} + \beta + r_{i,k,II} = 300 + \arctan \left(\frac{h_k \cdot \cos x_3 - x_1}{x_2 + h_k \cdot \sin x_3} \right) \quad (13)$$

donde $r_{i,k,II}$ son los residuos del ajuste en la posición II

Como el modelo de ajuste no es lineal es necesario conocer los valores aproximados de las incógnitas (x_1, x_2, x_3 y β) antes de proceder a su linealización. Los valores aproximados se obtienen como sigue, a partir de las medidas realizadas en la posición I del teodolito:

$$x_1^0 = h_6 - \cos z_{i,6,I} \frac{(h_1 - h_6) \cdot \sin z_{i,1,I}}{\sin (z_{i,6,I} - z_{i,1,I})} \quad (14.1)$$

$$x_2^0 = \sin z_{i,6,I} \frac{(h_1 - h_6) \cdot \sin z_{i,1,I}}{\sin (z_{i,6,I} - z_{i,1,I})} \quad (14.2)$$

$$x_3^0 = 0 \quad (14.3)$$

$$\beta = 0 \quad (14.4)$$

donde

x_1^0 puede obtenerse obligando a que la lectura vertical del teodolito sea 100 gon y anotando la lectura correspondiente de la medida materializada de longitud,

x_2^0 puede obtenerse midiendo con una cinta métrica la distancia entre el punto principal del teodolito y la medida de longitud. Debe procurarse que la medida sea horizontal y que el teodolito esté en dirección a la medida de longitud.

El modelo de ajuste lineal para la serie de medidas i es:

$$l_{i,k} + r_{i,k} = \hat{\beta} + a_{1,k} \cdot d\hat{x}_1 + a_{2,k} \cdot d\hat{x}_2 + a_{3,k} \cdot d\hat{x}_3 \quad (15)$$

siendo los valores estimados de las incógnitas:

$$\hat{\beta}, \hat{x}_1 = x_1^0 + d\hat{x}_1, \hat{x}_2 = x_2^0 + d\hat{x}_2, \hat{x}_3 \quad (16)$$

Para las medidas en posición I: $l_{i,k} = z_{i,k} - \left(100 - \arctan \frac{h_k - x_1^0}{x_2^0} \right)$ (17)

$$a_{1,k} = \rho \cdot \frac{x_2^0}{(h_k - x_1^0)^2 + (x_2^0)^2} \quad a_{2,k} = \rho \cdot \frac{(h_k - x_1^0)}{(h_k - x_1^0)^2 + (x_2^0)^2} \quad (18)$$

Para las medidas en posición II: $l_{i,k} = z_{i,k} - \left(300 + \arctan \frac{h_k - x_1^0}{x_2^0} \right)$ (19)

$$a_{1,k} = -\rho \cdot \frac{x_2^0}{(h_k - x_1^0)^2 + (x_2^0)^2} \quad a_{2,k} = -\rho \cdot \frac{(h_k - x_1^0)}{(h_k - x_1^0)^2 + (x_2^0)^2} \quad (20)$$

Para las medidas en ambas posiciones I y II:

$$a_{3,k} = \frac{h_k}{2 \cdot x_2^0} \cdot \text{sen}(2 \cdot z_{i,k}) \quad (21)$$

El error de verticalidad es $\hat{\beta} = \frac{\sum_{k=1}^{12} l_{i,k}}{12}$ (22)

El modelo matricial del ajuste es:

$$r = \begin{matrix} A & d\hat{x} & -I \\ 12,1 & 12,3 & 3,1 & 12,1 \end{matrix} \quad d\hat{x} = Q_{xx} \cdot (A^T \cdot I), \quad (23)$$

siendo A la matriz de coeficientes de las incógnitas, I la matriz columna, cuyos elementos son $l_{i,k}$ y Q_{xx} la matriz cofactor $Q_{xx} = (A^T \cdot A)^{-1}$.

La suma de los cuadrados de los residuos para el cálculo de la desviación típica es:

$$rr_i = \left(I^T \cdot I \right)_{12,1} - 12 \hat{\beta}^2 - \left(A^T \cdot I \right)_{3,12}^T \cdot d\hat{x}_{3,1} \quad (24)$$

La desviación típica en la medida de un ángulo vertical observado en una posición del teodolito es:

$$s_{i,v} = \sqrt{\frac{rr_i}{8}} \quad (25)$$

siendo el número de grados de libertad:

$$v_i = 12 \text{ observaciones} - 4 \text{ incógnitas} = 8 \quad (26)$$

La desviación típica en la medida de un ángulo vertical será, tras las series efectuadas:

$$s_l = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^4 s_{i,v}^2}{m}}, \text{ siendo } m \text{ el número total de series de medidas (2 o 3),} \quad (27)$$

y siendo el número total de grados de libertad $v = 8 \cdot m$; es decir, 16 o 24, según se hagan 2 o 3 series de medidas.

La desviación típica de un ángulo vertical observado en ambas posiciones del teodolito es:

$$s_v = \frac{s_l}{\sqrt{2}} \quad (28)$$

6. RESULTADOS

6.1. Cálculo de incertidumbres

El cálculo de incertidumbres se realizará aplicando los criterios establecidos en la “Guía para la expresión de la Incertidumbre de Medida” editada por el Centro Español de Metrología [2] y la guía EA-4/02 “Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration” [3].

En el Anexo 1 se incluye el desarrollo del cálculo de incertidumbres y la explicación de cómo se calcula cada contribución a la incertidumbre. A continuación se facilita la tabla resumen a partir de la cual se puede realizar el cálculo de la incertidumbre asociada a la calibración de teodolitos de acuerdo con este procedimiento.

Tabla 1. Balance de incertidumbres (Ángulos horizontales)

Magnitud X_i	Valor estimado x_i	Incertidumbre típica $u(x_i)$	Distribución de probabilidad	Coefficiente de sensibilidad c_i	Contribución a la incertidumbre $u_i(y)$
Repetibilidad del proceso de medida α_M	S_H	$u(S_H) = S_H = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^4 S_{i,H}^2}{m}}$	normal	1	$u(S_H) = S_H = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^4 S_{i,H}^2}{m}}$
Falta de verticalidad $C_{v,H}$	$\varepsilon_{v,H}$	$u(c_{v,H}) = \frac{s}{12\sqrt{12}}$ (*) $u(c_{v,H}) = \frac{e}{4\sqrt{12}}$	rectangular	1	$u(\varepsilon_{v,H}) = \frac{s}{12\sqrt{12}}$ (*) $u(\varepsilon_{v,H}) = \frac{e}{4\sqrt{12}}$
Resolución de lectura C_R	R	$u(R) = \frac{R}{\sqrt{12}}$	rectangular	1	$u(R) = \frac{R}{\sqrt{12}}$
α_H	0	Incertidumbre combinada		$u(\alpha_H) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 u_i^2(y)}$	
Número de grados efectivos de libertad, ν_{eff}				$\nu_{\text{eff}} = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4}{\nu_i}}$	
Factor de cobertura, k				$k = f(\nu_{\text{eff}})$	
Incertidumbre expandida, U				$U = k \cdot u(\alpha_H)$	

(*) Dependiendo de que el teodolito utilice un nivel de burbuja o electrónico.

Tabla 2. Balance de incertidumbres (Ángulos verticales)

Magnitud X_i	Valor estimado x_i	Incertidumbre típica $u(x_i)$	Distribución de probabilidad	Coficiente de sensibilidad c_i	Contribución a la incertidumbre $u(y)$
Repetibilidad del proceso de medida Z_M	s_V	$u(s_I) = s_I = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^4 s_{i,v}^2}{m}}$	normal	1	$u(s_I) = s_I = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^4 s_{i,v}^2}{m}}$
Compensador círculo vertical $C_{c,v}$	ε_{com}	$u(\varepsilon_{c,v}) = \frac{a}{\sqrt{3}}$	rectangular	1	$u(\varepsilon_{c,v}) = \frac{a}{\sqrt{3}}$
Resolución de lectura C_R	R	$u(R) = \frac{R}{\sqrt{12}}$	rectangular	1	$u(R) = \frac{R}{\sqrt{12}}$
Z_V		Incertidumbre combinada			$u(z_V) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 u_i^2(y)}$
Número de grados efectivos de libertad, ν_{eff}					$\nu_{eff} = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4}{\nu_i}}$
Factor de cobertura, k					$k = f(\nu_{eff})$
Incertidumbre expandida, U					$U = k \cdot u(z_V)$

En el Anexo 2 se incluye un ejemplo numérico de aplicación del cálculo de incertidumbres.

6.2. Interpretación de resultados

Las incertidumbres obtenidas deben entenderse como una estimación que caracteriza el campo de valores dentro del cual se encuentra el verdadero valor angular.

Las incertidumbres obtenidas corresponden a unas determinadas condiciones que no tienen por qué corresponder con las existentes durante el uso del instrumento. Por ejemplo los resultados obtenidos están poco afectados por variaciones del índice de refracción del aire y las punterías utilizadas son óptimas.

El período entre calibraciones es siempre responsabilidad del usuario, pues depende fundamentalmente de la frecuencia de utilización del instrumento y de las condiciones de uso. Un periodo razonable, para un teodolito con un uso medio en condiciones no agresivas, puede ser de un año.

7. REFERENCIAS

- [1] Vocabulario Internacional de Metrología. Conceptos fundamentales y generales y términos asociados. 3ª edición 2012 (Ed. VIM 2008 con inclusión de pequeñas correcciones), Centro Español de Metrología, 2012.
- [2] Evaluación de datos de medición. Guía para la expresión de la incertidumbre de medida., 3ª ed. en español (traducción de 1ª ed. 2008 en inglés), Centro Español de Metrología, 2009, NIPO: 706-09-002-6.
- [3] Guide EA-4/02 M: 2013, Evaluation of the Uncertainty of Measurement in Calibration, Sept. 2013, rev. 01.
- [4] Procedimiento para la elaboración de procedimientos de calibración. Grupo de Trabajo MINER-CEM. Ed. 2, Tres Cantos, Madrid. Año 2000.
- [5] ISO 17123-3:2001, Optics and optical instruments -- Field procedures for testing geodetic and surveying instruments -- Part 3: Theodolites.

8. ANEXOS

8.1. ANEXO 1: Desarrollo del cálculo de incertidumbres

En la medida de ángulos horizontales se considera el siguiente modelo:

$$\alpha_H = \alpha_M + c_{v,H} + c_R \quad (29)$$

siendo:

α_H = Ángulo horizontal verdadero (dirección).

α_M = Ángulo horizontal medido (dirección).

$c_{v,H}$ = Corrección debida a la falta de verticalidad del eje principal.

c_R = Corrección debida a la resolución del dispositivo visualizador.

La incertidumbre de la medida de un ángulo horizontal (2 direcciones) observado en las dos posiciones del teodolito es:

$$u(H) = u(\alpha_H) \cdot \sqrt{2} \quad (30)$$

El modelo a considerar en la medida de ángulos verticales, es el siguiente:

$$z_V = z_M + c_{c,V} + c_R \quad (31)$$

siendo:

z_V = Ángulo cenital verdadero.

z_M = Ángulo cenital medido.

$c_{c,v}$ = Corrección debida al compensador del círculo vertical.

c_R = Corrección debida a la resolución del dispositivo visualizador.

Aplicando la ley de propagación de varianzas a las ecuaciones (29) y (31):

$$u^2(\alpha_H) = u^2(\alpha_M) + u^2(c_{v,H}) + u^2(c_R) \quad (32)$$

$$u^2(z_V) = u^2(z_M) + u^2(c_{c,v}) + u^2(c_R) \quad (33)$$

A continuación se describe como pueden estimarse las contribuciones a la incertidumbre:

ÁNGULOS HORIZONTALES

- a) Incertidumbre asociada al proceso de calibración de los ángulos horizontales (dirección)

$$u(\alpha_M) = s_H \quad (34)$$

Los grados de libertad son $v[u(\alpha_M)] = m(j-1)(k-1) = 18$ o 27 , dependiendo de si se han efectuado 2 o 3 series de medida, y la distribución de probabilidad es normal.

- b) Incertidumbre asociada a la verticalidad del eje principal del instrumento.

El error en la medida de un ángulo horizontal debido a la falta de verticalidad del eje principal del teodolito responde a la expresión:

$$\varepsilon_{v,H} = I \cdot \cotg z \cdot \sen A \quad (35)$$

siendo I la inclinación del instrumento, z el ángulo cenital y A el ángulo horizontal con origen en el plano que contiene el eje principal del teodolito y la vertical.

Considerando como valores límite $z = 85 \text{ gon} \approx 76,5^\circ$ y $\sen A = 1$

$$\varepsilon_{v,H} \approx I / 4 \quad (36)$$

La incertidumbre asociada a la medida de un ángulo horizontal, por falta de verticalidad del eje principal del teodolito, para los distintos tipos de teodolito, es la siguiente:

- Teodolitos que utilizan un nivel tórico de burbuja para su nivelación. Considerando que el error máximo que se puede cometer al nivelar el teodolito es la tercera parte de la sensibilidad del nivel,

$$u(c_{v,H}) = \frac{\varepsilon_{v,H}}{\sqrt{12}} = \frac{s/3}{4 \cdot \sqrt{12}} = \frac{s}{12 \cdot \sqrt{12}} \quad (36.1)$$

siendo s la sensibilidad del nivel de burbuja.

Los grados de libertad son $v[u(c_{v,H})] = \infty$ y la distribución de probabilidad rectangular.

Nota: La sensibilidad suele venir expresada en segundos ("), por lo que debe pasarse a la unidad de medida del teodolito, habitualmente mgon. La hoja Excel que acompaña a este procedimiento hace el paso automáticamente.

- Teodolitos que utilizan un nivel electrónico para su nivelación o disponen de un sensor de inclinación para la corrección del ángulo horizontal

$$u(c_{v,H}) = \frac{e}{4 \cdot \sqrt{12}} \quad (36.2)$$

siendo e el error máximo que se puede cometer al nivelar el teodolito con el nivel electrónico o el error máximo del sensor de inclinación.

Los grados de libertad son $v[u(c_{v,H})] = \infty$ y la distribución de probabilidad rectangular.

- c) Contribución a la incertidumbre debida a la apreciación o resolución del teodolito.

$$u(c_R) = \frac{R}{\sqrt{12}} \quad (37)$$

siendo R la cifra menos significativa de un dispositivo visualizador digital o el valor de una división de escala de un sistema óptico de lectura, haciendo la hipótesis de que el máximo error que se comete es $R/2$.

Los grados de libertad son $v[u(c_R)] = \infty$ y la distribución de probabilidad rectangular.

Nota: En la hoja de cálculo que acompaña a este procedimiento, en todas las distribuciones rectangulares, en lugar de $v = \infty$ se toma $v = 100$, lo que simplifica el uso de la hoja de cálculo, y hace ligeramente más conservadora la incertidumbre final obtenida.

ÁNGULOS VERTICALES

- a) Incertidumbre asociada al proceso de calibración de los ángulos verticales.

$$u(z_M) = sv \quad (38)$$

Los grados de libertad son $v[u(z_M)] = 16$ o 24 , según se hagan 2 o 3 series de medida, y la distribución de probabilidad es normal.

- b) Contribución a la incertidumbre debida al compensador del círculo vertical.

$$u(c_{c,v}) = \frac{a}{\sqrt{3}} \text{ mgon} \quad (39)$$

Siendo $\pm a$ el rango de estabilización del compensador, indicado por el fabricante.

Los grados de libertad son $v[u(c_{c,v})] = \infty$ y la distribución de probabilidad rectangular.

- c) Contribución a la incertidumbre debida a la apreciación o resolución del teodolito.

$$u(c_R) = \frac{R}{\sqrt{12}} \quad (40)$$

siendo R la cifra menos significativa de un dispositivo visualizador digital o el valor de una división de escala de un sistema óptico de lectura, haciendo la hipótesis de que el máximo error que se comete es $R/2$.

Los grados de libertad son $v[u(c_R)] = \infty$ y la distribución de probabilidad rectangular.

Nota: En la hoja de cálculo que acompaña a este procedimiento, en todas las distribuciones rectangulares, en lugar de $v = \infty$ se toma $v = 100$, lo que simplifica el uso de la hoja de cálculo, y hace ligeramente más conservadora la incertidumbre final obtenida.

Tanto para los ángulos horizontales como para los verticales, no se consideran las contribuciones a la incertidumbre debidas a los errores de ajuste o construcción abajo indicados, pues se cancelan mediante la medida en ambas posiciones del teodolito.

- Falta de perpendicularidad entre eje de colimación y eje secundario.
- Error de índice vertical.
- Falta de perpendicularidad entre el eje secundario y el eje vertical.
- Excentricidad de los círculos graduados con sus ejes de giro.

Tampoco se incluye la contribución a la incertidumbre angular debida a la incertidumbre en la puntería, pues se considera incluida en la desviación típica obtenida en el proceso de medida

Los colimadores se utilizan únicamente como punterías óptimas, por lo que no es necesario realizar una calibración previa.

Para el cálculo del número de grados efectivos de libertad se aplica la fórmula de Welch-Satterthwaite.

$$v_{\text{eff}} = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4}{v_i}} \quad (41)$$

Para el cálculo de la incertidumbre expandida, $U=k \cdot u(y)$ se necesita conocer el valor del factor de cobertura k para un nivel de confianza de aproximadamente el 95 %. Para obtenerlo se entra en la tabla de la distribución t de Student, con el número de grados de libertad y el nivel de confianza. En caso de utilizar para los cálculos la hoja Excel anexa, esta aplica la función INV.T.2C (probabilidad, grados de libertad) para obtener dicho factor.

8.2. ANEXO 2: Ejemplo numérico de aplicación

8.2.1 Información general

Se ha calibrado un teodolito con las siguientes características:

Marca: xxx

Modelo: xxx

Aumentos del telescopio: 32 X

Sensibilidad del nivel de burbuja: 20"/2 mm

Resolución del sistema digital de lectura: 0,1 mgon

Estabilización del índice vertical automático: $\pm 0,08$ mgon

8.2.2 Toma y proceso de datos de medidas de ángulos horizontales

Los valores angulares correspondientes a la serie 1 de medidas de ángulos horizontales figuran en la tabla 3

Tabla 3. Ángulos horizontales (serie 1)

Vuelta	Puntería	S. horario	S. antihor	S. horario	S. antihor	Media de la	Media de la	d	γ	γ^2	
j	k	$X_{j,k,I}$	$X_{j,k,II}$	reducido	reducido	Vuelta, m	Estación, M	mgon	mgon	mgon ²	
		gon	gon	gon	gon	gon	gon				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
	A	66,4109	266,4103	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00	0,00	0,00	
	B	81,4080	281,4071	14,9971	14,9968	14,9970	14,9972	0,26	0,27	0,07	
1	C	103,4125	303,4116	37,0016	37,0013	37,0015	37,0014	-0,03	-0,02	0,00	
	D	166,4111	366,4115	90,0002	90,0012	90,0007	90,0005	-0,25	-0,25	0,06	
								Σ	-0,01	0,00	0,13
								$d=\Sigma d/4$	0,00		
	A	116,4251	316,4237	0,0000	0,0000	0,0000		0,00	0,37	0,13	
	B	131,4229	331,4215	14,9978	14,9978	14,9978		-0,59	-0,22	0,05	
2	C	153,427	353,4257	37,0019	37,0020	37,0020		-0,53	-0,16	0,03	
	D	206,4258	6,4246	90,0007	90,0009	90,0008		-0,35	0,02	0,00	
								Σ	-1,46	0,00	0,21
								$d=\Sigma d/4$	-0,37		
	A	166,4353	366,4336	0,0000	0,0000	0,0000		0,00	-0,33	0,11	
	B	181,4312	381,4313	14,9959	14,9977	14,9968		0,41	0,08	0,01	
3	C	203,4358	3,4355	37,0005	37,0019	37,0012		0,23	-0,11	0,01	
	D	266,4351	66,4333	89,9998	89,9997	89,9998		0,70	0,37	0,13	
								Σ	1,34	0,00	0,26
								$d=\Sigma d/4$	0,33		
	A	216,4441	16,4431	0,0000	0,0000	0,0000		0,00	-0,03	0,00	
	B	231,4415	31,4403	14,9974	14,9972	14,9973		-0,09	-0,12	0,01	
4	C	253,4456	53,4438	37,0015	37,0007	37,0011		0,32	0,29	0,08	
	D	306,4447	106,4436	90,0006	90,0005	90,0006		-0,10	-0,13	0,02	
								Σ	0,14	0,00	0,12
								$d=\Sigma d/4$	0,03		
									$\Sigma r^2 =$	0,72	
$S_2 =$	0,28										

La suma de los cuadrados de los residuos es: $\sum r_1^2 = 0,72 \text{ mgon}^2$

La desviación típica para la serie 1 de una dirección horizontal observada en ambas posiciones del teodolito es:

$$s_{1,H} = \sqrt{\frac{\sum r_1^2}{v_1}} = \sqrt{\frac{0,72}{9}} = 0,28 \text{ mgon}$$

Suponiendo que las desviaciones típicas obtenidas en las series de medidas $i=2$ e $i=3$ son $s_{2,H} = 0,30 \text{ mgon}$ y $s_{3,H} = 0,25 \text{ mgon}$ respectivamente, la desviación típica de una dirección observada en las dos posiciones del teodolito es:

$$s_H = \sqrt{\frac{0,28^2 + 0,30^2 + 0,25^2}{3}} = 0,28 \text{ mgon}$$

8.2.3 Componentes de la incertidumbre (ángulos horizontales)

- a) Incertidumbre asociada al proceso de calibración de los ángulos horizontales (dirección)

$$u(\alpha_M) = s_H = 0,28 \text{ mgon}$$

Los grados de libertad son $v[u(\alpha_M)] = 27$ y la distribución de probabilidad normal.

- b) Incertidumbre asociada a la verticalidad del eje principal del instrumento.

$$u(c_{v,H}) = \frac{s}{12 \cdot \sqrt{12}} = \frac{20''}{12 \cdot \sqrt{12}} = 0,48'' = 0,15 \text{ mgon}$$

Los grados de libertad son $v[u(c_{v,H})] = \infty$ y la distribución de probabilidad rectangular.

- c) Contribución a la incertidumbre debida a la resolución del sistema de lectura del teodolito.

$$u(c_R) = \frac{R}{\sqrt{12}} = \frac{0,1 \text{ mgon}}{\sqrt{12}} = 0,03 \text{ mgon}$$

Los grados de libertad son $v[u(c_R)] = \infty$ y la distribución de probabilidad rectangular.

Aplicando la fórmula (36) obtenemos la incertidumbre combinada asociada a la medida de una dirección horizontal en las dos posiciones del teodolito.

$$u^2(\alpha_H) = u^2(\alpha_M) + u^2(c_{v,H}) + u^2(c_R)$$

$$\begin{aligned} u(\alpha_H) &= \sqrt{u^2(\alpha_M) + u^2(c_{v,H}) + u^2(c_R)} = \\ &= \sqrt{0,28^2 + 0,15^2 + 0,03^2} = 0,32 \text{ mgon} \end{aligned}$$

Para obtener el número de grados efectivos de libertad aplicamos la fórmula de Welch-Satterthwaite:

$$v_{\text{eff}} = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4}{v_i}} = \frac{0,32^4}{\frac{0,28^4}{27} + \frac{0,15^4}{100} + \frac{0,03^4}{100}} = 44$$

Para un nivel de confianza del 95 % y 44 grados de libertad, el factor de cobertura es aprox. $k = 2,02$.

La incertidumbre expandida es:

$$U(\alpha_H) = 2,02 \cdot u(\alpha_H) = 0,64 \text{ mgon}$$

La incertidumbre expandida asociada a la medida de un ángulo horizontal en las dos posiciones del teodolito es:

$$U(H) = U(\alpha_H) \cdot \sqrt{2} = 0,64 \cdot \sqrt{2} = 0,90 \text{ mgon}$$

8.2.4 Toma y proceso de datos de medidas de ángulos verticales

Tabla 4. Ángulos verticales (serie 1)

1	2	3	4	5	6	7
h_k (m)	z_{1k} (I y II) (gon)	a_{1k}	a_{2k}	a_{3k}	l_{1k} (gon)	dx
2,7009	91,0480	6,3415	0,9534	0,0382	0,5479	0,0110
2,0009	95,3044	6,4446	0,5094	0,0150	0,3256	0,4857
1,4508	98,6857	6,4814	0,1491	0,0031	0,1497	0,2528
0,9008	102,0727	6,4778	-0,2139	-0,0030	-0,0289	
0,5008	104,5325	6,4498	-0,4758	-0,0036	-0,1554	
0,2008	106,3671	6,4150	-0,6693	-0,0020	-0,2508	
2,7009	308,9617	-6,3415	-0,9534	-0,0382	-0,5382	
2,0009	304,7037	-6,4446	-0,5094	-0,0150	-0,3175	
1,4508	301,3234	-6,4814	-0,1491	-0,0031	-0,1406	
0,9008	297,9361	-6,4778	0,2139	0,0030	0,0377	
0,5008	295,4768	-6,4498	0,4758	0,0036	0,1647	
0,2008	293,6420	-6,4150	0,6693	0,0020	0,2599	

Cada columna tiene el siguiente significado:

Columna 1: Valores calibrados de los trazos de la medida materializada de longitud

Columna 2: Ángulos cenitales medidos a los trazos de la medida materializada de longitud en las dos posiciones del teodolito (I y II).

Columna 3, 4 y 5: Coeficientes de las incógnitas del modelo de ajuste linealizado. Elementos de la matriz A.

Columna 6: Corrección del error de índice vertical para cada una de las medidas. Elementos de la matriz I.

Columna 7: Valor de las incógnitas $d\hat{x} = Q_{xx} \cdot (A^T \cdot I)$

$$\text{El error de índice vertical } \hat{\beta} = \frac{\sum_{k=1}^{12} l_{1,k}}{12} = 0,0045 \text{ gon}$$

$$rr_1 = \left(\begin{matrix} I^T \cdot I \\ 12,1 \end{matrix} \right) - 12\hat{\beta}^2 - \left(\begin{matrix} A^T \cdot I \\ 3,12 \quad 12,1 \end{matrix} \right)^T \cdot d\hat{x}_{3,1} = 5,14 \cdot 10^{-6} \text{ gon}$$

La desviación típica en la medida de un ángulo vertical es:

$$s_{1,V} = \sqrt{\frac{rr_1}{8}} = 0,80 \text{ mgon}$$

Suponiendo que las desviaciones típicas obtenidas en las series de medidas $i=2$ e $i=3$ son $s_{2,V} = 0,75 \text{ mgon}$ y $s_{3,V} = 0,67 \text{ mgon}$ respectivamente, la desviación típica para las tres series de la medida de un ángulo vertical observado en las dos posiciones del teodolito es:

$$s_I = \sqrt{\frac{0,80^2 + 0,75^2 + 0,67^2}{3}} = 0,74 \text{ mgon}$$

Siendo el número total de grados de libertad $\nu = 3 \cdot 8 = 24$

$$s_V = \frac{s_I}{\sqrt{2}} = \frac{0,74 \text{ mgon}}{\sqrt{2}} = 0,52 \text{ mgon}$$

8.2.5 Componentes de la incertidumbre (ángulos verticales)

- a) Incertidumbre asociada al proceso de calibración de los ángulos verticales.

$$u(z_M) = s_V = 0,52 \text{ mgon}$$

Los grados de libertad son $\nu[u(z_M)] = 24$ y la distribución de probabilidad normal.

- b) Contribución a la incertidumbre debida al compensador del círculo vertical.

$$u(c_{c,v}) = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{0,08 \text{ mgon}}{\sqrt{3}} = 0,05 \text{ mgon}$$

Los grados de libertad son $\nu[u(c_{c,v})] = \infty$ y la distribución de probabilidad rectangular.

- c) Contribución a la incertidumbre debida a la resolución del sistema de lectura del teodolito.

$$u(c_R) = \frac{R}{\sqrt{12}} = \frac{0,1 \text{ mgon}}{\sqrt{12}} = 0,03 \text{ mgon}$$

Los grados de libertad son $\nu[u(c_R)] = \infty$ y la distribución de probabilidad rectangular.

Aplicando la fórmula (37) se obtiene la incertidumbre combinada asociada a la medida de un ángulo vertical en las dos posiciones del teodolito.

$$u^2(z_V) = u^2(z_M) + u^2(c_{c,v}) + u^2(c_R)$$

$$\begin{aligned}u(z_V) &= \sqrt{u^2(z_M) + u^2(c_{c,V}) + u^2(c_R)} = \\ &= \sqrt{0,52^2 + 0,05^2 + 0,03^2} = 0,52 \text{ mgon}\end{aligned}$$

Para obtener el número de grados efectivos de libertad se aplica la fórmula de Welch-Satterthwaite:

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4}{\nu_i}} = \frac{0,52^4}{\frac{0,52^4}{24} + \frac{0,05^4}{\infty} + \frac{0,03^4}{\infty}} = 24$$

Para 24 grados de libertad y un nivel de confianza del 95 %, se obtiene un factor de cobertura $k = 2,06$.

La incertidumbre expandida es por tanto:

$$U(z_V) = 2,06 \cdot u(z_V) = 1,09 \text{ mgon}$$

Metrología

NIPO: 113-22-014-0